Inleiding Statistiek – Tentamen 31 januari 2017

**Aan het eind van het tentamen is een tabel ingevoegd.**
**Gebruik van een zakrekenmachine is toegestaan maar niet nodig.**
**De vier opgaven hebben gelijk gewicht.**
**Licht je antwoorden toe!**

**Opgave 1.** De stochastische grootheden $Y_1, \ldots, Y_n$ zijn onderling onafhankelijk en $Y_i$ is verdeeld volgens de $N(\theta x_i, x_i^2)$-verdeling. Hierin zijn $x_1, \ldots, x_n$ bekende constanten en is $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter. De waarneming is $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$. [*De normale verdeling* $N(\mu, \sigma^2)$ *heeft kansdichtheid* $v \mapsto (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(v-\mu)^2/\sigma^2}$.]

a Bepaal de aannemelijkheids (likelihood) functie voor $\theta$.
b Laat zien dat de meest aannemelijke schatter (MLE) voor $\theta$ gelijk is aan $\hat{\theta} = n^{-1}\sum_{i=1}^n (Y_i/x_i)$.
c Is deze meest aannemelijke schatter zuiver?
d Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\theta$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.

**Opgave 2.** De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld volgens de kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{als } x \geq \theta, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hierin is de parameter $\theta > 0$ onbekend. De waarneming is $X = (X_1, \ldots, X_n)$. [*De exponentiële verdeling met parameter* $\lambda$ *heeft kansdichtheid* $v \mapsto \lambda e^{-\lambda v}$, *voor* $v > 0$; *en heeft verwachting* $1/\lambda$ *en variantie* $1/\lambda^2$.] Laat $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a Laat zien dat $X_{(1)} - \theta$ exponentieel verdeeld is met parameter $n$.
b Welke van de schatters $X_{(1)} + c$ voor $\theta$ verdient de voorkeur ($c \in \mathbb{R}$)?
c Bepaal de Bayes schatter voor $\theta$ (gebaseerd op $X$) als de a-priori kansverdeling gelijk is aan de exponentiële verdeling met parameter 1.

**Opgave 3.** De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld volgens de kansdichtheid

$$f_\theta(x) = c(\theta)\, x^{\theta-1}(1-x)^{1-\theta} 1_{0<x<1}.$$

Hierin is $\theta \in (0,1)$ een onbekende parameter en is $c(\theta)$ een constante die van $\theta$ afhangt. Dan geldt dat $\mathrm{E}_\theta X_1 = \theta/2$ en $\mathrm{var}_\theta\, X_1 = \theta(2-\theta)/12$. De waarneming is $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

a Bepaal een voldoende statistische grootheid voor $\theta$ (met waarden in $\mathbb{R}$).
b Bepaal een voldoende en volledige statistische grootheid voor $\theta$.
c Bepaal de momentenschatter voor $\theta$.
d Is de momentenschatter UMVZ voor $\theta$? Een volledig bewijs is onnodig, maar licht uw antwoord toe!

**Opgave 4.** De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \binom{2}{x} \frac{\theta^{x-1}(1-\theta)^{2-x}}{2-\theta}, \qquad x \in \{1, 2\}.$$

Hierin is $\theta \in (0,1)$ een onbekende parameter. Dan geldt dat $\mathrm{E}_\theta X_1 = 2/(2-\theta)$ en $\mathrm{var}_\theta\, X_1 = 2\theta(1-\theta)/(2-\theta)^2$. De waarneming is $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

a Bepaal de meest onderscheidende (lotings) toets voor $H_0\colon \theta = 1/2$ tegen $H_1\colon \theta = 2/3$ by onbetrouwbaarheidsdrempel 5 %.
b Bepaal de uniform meest onderscheidende (lotings) toets voor $H_0\colon \theta \leq 1/2$ tegen $H_1\colon \theta > 1/2$ by onbetrouwbaarheidsdrempel 5 %. Licht uw antwoord toe!
c Laat zien dat het kritiek gebied voor grote $n$ wordt benaderd door $\{x\colon \sqrt{n}(\bar{x}_n - 4/3) > 1.65\sqrt{2}/3\}$.
d Bepaal een benadering voor het onderscheidend vermogen van deze toets in $\theta = 2/3$ als $n = 25$.

**ZOZ voor tabellen**

Staartkansen van standaard normale variabele $Z$.

| $a$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.65 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z \geq a)$ | 0.5 | 0.46 | 0.42 | 0.38 | 0.34 | 0.31 | 0.27 | 0.24 | 0.21 | 0.18 | 0.16 | 0.14 | 0.12 | 0.1 | 0.08 | 0.07 | 0.055 | 0.05 |

| $a$ | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 1.96 | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Z \geq a)$ | 0.04 | 0.04 | 0.03 | 0.025 | 0.02 | 0.02 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Waarden $a$ zodanig dat $P(T \leq a) = \gamma$, voor $T$ chikwadraat verdeeld met $n$ vrijheidsgraden.

| $\gamma$ / n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.025 | 0.2 | 0.5 | 0.8 | 1.2 | 1.7 | 2.2 | 2.7 | 3.2 | 3.8 | 4.4 | 5 | 5.6 | 6.3 | 6.9 | 7.6 | 8.2 | 8.9 | 9.6 | 10.3 |
| 0.05 | 0.4 | 0.7 | 1.1 | 1.6 | 2.2 | 2.7 | 3.3 | 3.9 | 4.6 | 5.2 | 5.9 | 6.6 | 7.3 | 8 | 8.7 | 9.4 | 10.1 | 10.9 | 11.6 |
| 0.95 | 7.8 | 9.5 | 11.1 | 12.6 | 14.1 | 15.5 | 16.9 | 18.3 | 19.7 | 21 | 22.4 | 23.7 | 25 | 26.3 | 27.6 | 28.9 | 30.1 | 31.4 | 32.7 |
| 0.975 | 9.3 | 11.1 | 12.8 | 14.4 | 16 | 17.5 | 19 | 20.5 | 21.9 | 23.3 | 24.7 | 26.1 | 27.5 | 28.8 | 30.2 | 31.5 | 32.9 | 34.2 | 35.5 |