Inleiding Statistiek – Tentamen 22 december 2016

Op de achterkant van dit tentamen zijn twee tabellen ingevoegd.
Gebruik van een zakrekenmachine is toegestaan maar niet nodig.
De vier opgaven hebben gelijk gewicht.
Licht je antwoorden toe!

Opgave 1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{4\, 2^{-x}\theta^{x-1}(1-\theta)^{2-x}}{2-\theta}, \qquad x \in \{1, 2\}.$$

Hierin is $\theta \in (0,1)$ een onbekende parameter, en $n \geq 100$ is bekend. Dan geldt dat $\mathrm{E}_\theta X_1 = 2/(2-\theta)$ en $\mathrm{var}_\theta\, X_1 = 2\theta(1-\theta)/(2-\theta)^2$. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

a Bepaal de momentenschatter voor θ.
b Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ.
c Bepaal de Fisher informatie voor θ in X_i en in X.
d Bepaal een betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheidsniveau bij benadering 95%.

Opgave 2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter, en $n = 10$. Dan bezit de variabele $2\theta X_i^2$ een chikwadraat verdeling met 2 vrijheidsgraden. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

a Welke verdeling bezit $2\theta \sum_{i=1}^n X_i^2$?
b Bepaal de meest onderscheidende toets voor $H_0\colon \theta = 1$ tegen $H_1\colon \theta = 2$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5 %.
c Bepaal de uniform meest onderscheidende toets voor $H_0\colon \theta \leq 1$ tegen $H_1\colon \theta > 1$ by onbetrouwbaarheidsdrempel 5 %. Licht je antwoord toe!
d Bepaal een exact 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ.

Opgave 3. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld volgens de kansdichtheid

$$f_{\alpha,\beta}(x) = c(\alpha, \beta)\, x^{\alpha-1}(1-x)^\beta 1_{0<x<1}.$$

Hierin zijn $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ onbekende parameters en is $c(\alpha, \beta)$ een constante die van (α, β) afhangt. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

a Bepaal een voldoende statistische vector voor (α, β).
b Bepaal een voldoende en volledige statistische vector voor (α, β).
c Geef de definitie van een uniform minimum variantie zuivere (UMVZ) schatter voor $g(\alpha, \beta)$, in termen van mean square error.
d Bepaal een UMVZ schatter voor $g(\alpha, \beta) = \mathrm{E}_{\alpha,\beta} \log\bigl(X_1/(1-X_1)\bigr)$. Licht je antwoord toe!

Opgave 4. De stochastische grootheid X bezit de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} 1_{x \geq \theta}.$$

Hierin is $\theta \geq 1$ een onbekende parameter. We nemen *alleen* X waar, geen steekproef.

a Toon aan: $2X/3$ is een zuivere schatter van θ.
b Bepaal de MSE van $2X/3$.
c Toon aan: de a-posteriori verdeling van θ relatief tot de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = 2\theta^{-3}1_{\theta \geq 1}$ is de homogene verdeling op $[1, X]$.
d Bepaal de Bayes schatter voor θ.
e Welke van de twee schatters, $2X/3$ of de Bayes schatter, verdient de voorkeur als de ware waarde van de parameter gelijk is aan $\theta = 1$? En welke als $\theta = 10$?

Staartkansen van standaard normale variabele Z.

a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.65
$P(Z \geq a)$	0.5	0.46	0.42	0.38	0.34	0.31	0.27	0.24	0.21	0.18	0.16	0.14	0.12	0.1	0.08	0.07	0.055	0.05

a	1.7	1.8	1.9	1.96	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3	3.4
$P(Z \geq a)$	0.04	0.04	0.03	0.025	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Waarden a zodanig dat $P(T \leq a) = \gamma$, voor T chikwadraat verdeeld met n vrijheidsgraden.

γ / n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0.025	0.2	0.5	0.8	1.2	1.7	2.2	2.7	3.2	3.8	4.4	5	5.6	6.3	6.9	7.6	8.2	8.9	9.6	10.3
0.05	0.4	0.7	1.1	1.6	2.2	2.7	3.3	3.9	4.6	5.2	5.9	6.6	7.3	8	8.7	9.4	10.1	10.9	11.6
0.95	7.8	9.5	11.1	12.6	14.1	15.5	16.9	18.3	19.7	21	22.4	23.7	25	26.3	27.6	28.9	30.1	31.4	32.7
0.975	9.3	11.1	12.8	14.4	16	17.5	19	20.5	21.9	23.3	24.7	26.1	27.5	28.8	30.2	31.5	32.9	34.2	35.5