Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, dinsdag 23 januari 2018, 14.00–17.00 uur

Motiveer steeds je antwoord, en vermeld welke stellingen je gebruikt.

1. Zij $\mathbf{Z}[i]$ de ring van gehele getallen van Gauss.
a. Ontbind $78 - 104i$ in irreducibele factoren in $\mathbf{Z}[i]$.
b. Bepaal de ggd van $78 - 104i$ en $1 + 65i$ in $\mathbf{Z}[i]$.

2. Beschouw $f = X^{23} - X - 2018 \in \mathbf{Z}[X]$.
a. Zijn de 23 complexe nulpunten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{23} \in \mathbf{C}$ van f allemaal verschillend?
b. Bereken $\sum_{i=1}^{23} \alpha_i^{10}$ en $\sum_{i=1}^{23} \alpha_i^{23}$.

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welk van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_7[X]$ het priem is:

$$(X^4 - 4X^3 + 10), \qquad (X^4 - 4X^3 + 10,\ X - 1), \qquad (X^4 - 4X^3 + 10,\ 10).$$

(Motiveer je $3 \times 3 = 9$ antwoorden!)

4. Zij $A \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : x + 2y + 3z \equiv 0 \bmod 6 \text{ en } x + y + z \equiv 0 \bmod 2\}.$$

a. Bepaal een basis voor de abelse groep A.
b. Bepaal de orde van de abelse groep $\mathbf{Z}^3/A$. Is $\mathbf{Z}^3/A$ cyclisch?

5. Zij $\zeta = e^{2\pi i/3} \in \mathbf{C}$ een primitieve derde eenheidswortel, en laat $M_n : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door de $n \times n$-matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ met coëfficiënten gegeven door

$$a_{ij} = \zeta^{i+j}.$$

a. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van M_6.
b. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van M_{2018}.