

Tentamen Analyse 1W

Maandag 29 januari 2018, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.
-

1 De functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x - |x^2 - x - 2|, & x < 3, \\ \frac{13}{2}, & x \geq 3. \end{cases}$$

- Is f continu op $(-\infty, 3)$? Beargumenteer!
- Toon aan dat f differentieerbaar is in 3.
- Is f continu in 3? Beargumenteer!
- Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 De functie $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e^{2x} + x^2} - \sqrt{e^{2x} + 1}}{x - 1}, & x \in [0, \infty) \setminus \{1\}, \\ \frac{x^2 + 5}{2x - 1 + e^x}, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

- Bepaal de eventuele verticale asymptoten van f .
- Bepaal de eventuele horizontale en/of scheve asymptoten van f .

3 (a) Toon aan dat voor iedere $x \in (0, 1)$ geldt dat

$$\arctan(x) > \ln(1 + x).$$

- Toon aan dat er een $x \in (1, \infty)$ bestaat zo dat $\arctan(x) = \ln(1 + x)$.

4 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergeren, voorwaardelijk convergeren of divergeren:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + n}{n^4 2^n + 1},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(2n)!} 3^{n^2},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

5 Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integralen:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5(x) \cos(x) + \sin^2(x)) dx,$$

$$(b) \int \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x + 1} dx,$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{(1+x)e^x}{4x^2 e^{2x} + 1} dx.$$

6 (a) Geef de Taylorreeksen van de functies $x \mapsto e^x$ en $x \mapsto \sin(x^2)$ rond het punt $a = 0$.

(b) Bereken de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1 - \cos(x))(e^x - 1)}{(\sin(x^2) - x^2)}.$$

(c) Geef het tweedegraads Taylorpolynoom van de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ rond het punt $a = 4$.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	15	11	8	22	22	12	90
	(2+4+2+7)	(5+6)	(4+4)	(8+8+6)	(8+8+6)	(3+4+5)	