Tentamen Caleidoscoop

22 december 2017 (14.00 - 17.00 uur)

Beantwoord vragen helder en leesbaar.

Opgave 1
Voor welke reële getallen x geldt:

a) $\neg[x < 0 \Rightarrow x > 0]$

b) $x = 13 \Leftrightarrow x^2 = 13$

Opgave 2

a-1) Bewijs met volledige inductie naar het aantal knopen dat enkelvoudige grafen zonder cykels (kringen) altijd vlak zijn.

a-2) Wat kan je zeggen over het vlak zijn van grafen waarin elke cykel uit hoogstens twee takken bestaat?

b) Beschouw de volgende eigenschap die een reële rij $\{a_i\}$ kan hebben:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall N : \exists i \geq N : |a_N - a_i| < \epsilon.$$

1. Laat zien dat elke Cauchy-rij deze eigenschap heeft.
2. Is elke rij met deze eigenschap ook Cauchy?

c) Formuleer het keuzeaxioma.

Opgave 3
Schrijf in de vorm $a + bi$:

a) $\frac{1+i}{1-2i}$

b) $[\sin(\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos(-\frac{4\pi}{3})i]^{20171222}$

Opgave 4
Zij $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ een priemgetal. Beschouw op $\mathbb{Z}$ de relatie $\sim_p$ gedefinieerd door:

$$a \sim_p b \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_{>1} : p^n | a \Leftrightarrow p^n | b.$$

a) Laat zien dat dit een equivalentierelatie is.

b) Welke kardinaliteiten kunnen de equivalentieklassen hebben?

c) Voor welke $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x^2 \sim_p x^3$?

Opgave 5
Zij $\mathbb{R}[X]$ de verzameling van alle polynomen in X met reële coëfficiënten en zij E de verzameling van alle polynomen in X met reële coëfficiënten én van even graad. Bewijs dat deze twee verzamelingen equipotent (gelijkmachtig) zijn.