Hertentamen Caleidoscoop
24 januari 2018 (14.00 - 17.00 uur)

Beantwoord vragen helder en leesbaar.

Opgave 1
Voor welke reële getallen x geldt:

a) $\neg[x < 0 \Leftrightarrow x > 0]$

b) $x = 13 \Leftrightarrow x^2 = -13$

Opgave 2

a) Bewijs met volledige inductie naar het aantal takken dat enkelvoudige grafen zonder cykels (kringen) altijd vlak zijn.

b) Beschouw de volgende eigenschap die een reële rij $\{a_i\}$ kan hebben:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall N : \exists i > N : |a_N - a_i| < \epsilon.$$

1) Laat zien dat elke Cauchy-rij deze eigenschap heeft.

2) Is elke rij met deze eigenschap ook Cauchy?

c) Formuleer het keuzeaxioma.

Opgave 3
Schrijf in de vorm $a + bi$:

a) $\frac{1+i}{1-2i}$

b) $\left[\left(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos(-\frac{4\pi}{3})i\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)\right]^{20180124}$

Opgave 4
Zij $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ een priemgetal. Beschouw op $\mathbb{Z}$ de relatie $\sim_p$ gedefinieerd door:

$$a \sim_p b \Leftrightarrow [\ p|a \Leftrightarrow p|b\ ]\ .$$

a) Laat zien dat dit een equivalentierelatie is.

b) Beschrijf de quotiëntruimte $\mathbb{Z}/\sim$.

c) Voor welke $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x^2 \sim_p x^3$?

Opgave 5
Op het vorige tentamen kwam $\mathbb{R}[X]$, de verzameling van alle polynomen in X met reële coëfficiënten, ter sprake. Een student merkte bij de bespreking op dat het triviaal zou zijn dat deze verzameling equipotent is met $\mathbb{R}$. De docent was het hier niet helemaal mee eens (wel dat ze equipotent zijn). Bij onderstaande opgaven mag je gebruiken dat zowel $\mathbb{R}^2$ als ook $(0, 1)$ equipotent zijn met $\mathbb{R}$.

a) Zij A_i, met $i = 1, 2, \cdots$, verzamelingen die alle equipotent zijn met $\mathbb{R}$. Bewijs dat de vereniging $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ook equipotent is met $\mathbb{R}$.

b) Bewijs dat inderdaad geldt $\mathbb{R}[X] \sim \mathbb{R}$. Hopelijk had de docent ongelijk ...