Hertentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 12 maart 2018, 10:00-13:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Er worden exacte antwoorden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

1.) Gegeven is de tweede orde differentiaalvergelijking,

$$\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0. \tag{1}$$

De oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ – met $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 0$ en $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 1$ – vormen per definitie twee lineair onafhankelijke oplossingen van (1).

(a) Laat *door middel van reeksontwikkelingen rond* $t_0 = 0$ zien dat $y_1(t)$ gegeven wordt door $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

(b) Laat $W[y_1, y_2](t) = W(t)$ de bij de oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ horende Wronskiaan zijn. Laat – zonder gebruik te maken van (a) – zien dat $W(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.
Opmerking/Herinnering. $W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}$

(c) Toon aan dat $y_2(t)$ een oplossing is van de eerste orde vergelijking $\dot{y} + ty = 1$.
Hint. Gebruik (a) en (b).

(d) Bepaal een expliciete uitdrukking voor $y_2(t)$ waarvoor $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 1$. De uiteindelijke oplossing mag integralen bevatten.

2.) Beschouw de inhomogene tweede orde vergelijking

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = \alpha, \tag{2}$$

met $\alpha > 0$.

(a) Bepaal de oplossing van de homogene vergelijking.

(b) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de algemene oplossing $x_{alg}(t)$ van vergelijking (2).

(c) Definieer $x_\gamma(t)$ als *een* oplossing van (2) waarvoor geldt dat $x_\gamma(0) = \gamma$. Beredeneer dat als $x_\gamma(0) = \gamma < 0$ er een $t_* > 0$ moet zijn waarvoor geldt dat $x_\gamma(t_*) = 0$.

(d) Zijn er oplossingen $x_{alg}(t)$ die meer dan 1 (positief) nulpunt hebben? Ofwel: zijn er oplossingen $x(t)$ van (2) waarvoor er $t_{2,*} > t_{1,*} > 0$ bestaan zodanig dat $x(t_{1,*}) = x(t_{2,*}) = 0$?

!! Vervolg op achterkant !!

3.) Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= x - y - 2x(x^2+y^2) \\ y' &= x + y + xy - 2y(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Je mag aannemen dat de oorsprong het enige vaste punt van dit systeem is.

(a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem. Wat kun je hieruit concluderen voor de stabiliteit en het karakter van $(0,0)$ voor het gehele stelsel?

(b) Schrijf het stelsel in poolcoördinaten r en θ.

(c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat.

4.) Bekijk het predator-prey model

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - yx \\ \dot{y} &= y(dx-1), \end{aligned}$$

met $d > 0$ en $x \geq 0, y \geq 0$.

(a) Bepaal de vaste/equilibrium punten voor alle $d > 0$. Geef, afhankelijk van $d > 0$, voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.

(b) Geef voor elk vast punt, afhankelijk van $d < 1$, een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt. Bepaal ook het bijbehorende karakter (zadel, centrum, focus of knoop) van dat vaste punt.

(c) Neem nu $d < 1$. Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Neem nu $0 < d \leq 1$ (dus inclusief $d = 1$). Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden (x_0, y_0) waarvoor geldt dat
$x_0 > 0$ en $y_0 \geq 0$. Bepaal voor al deze oplossingen
$\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))$. Geef ook een bewijs hiervoor.
Opmerking. Je kunt de gevallen $0 < d < 1$ en $d = 1$ apart behandelen.