

Tentamen Inleiding Statistiek 2017-2018

Toegestane hulpmiddelen: een eenvoudige rekenmachine. Geen boeken, aantekeningen, grafische rekenmachines, telefoons, smart watches of andere hulpmiddelen.

Licht al je antwoorden toe.

1. De stochastische grootheid X is verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}\{0 \leq x \leq \theta\}.$$

Hierin is $0 < \theta < 1$ een onbekende parameter. We doen slechts één waarneming, X (geen steekproef).

- Bepaal een momentenmethodeschatter van θ .
 - Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor θ .
 - Welke van de twee schatters verdient de voorkeur, in termen van verwachte kwadratische fout (MSE)?
 - Laat zien dat X/θ een pivot is.
 - Bepaal een $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor θ .
 - Bepaal de Bayes-schatter voor θ relatief aan de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = \mathbf{1}\{0 \leq \theta \leq 1\}$ (de homogene verdeling op $[0, 1]$).
2. Beschouw de volgende dichtheid:

$$p_{\theta}(x) = \frac{e^{x-\theta}}{(1 + e^{x-\theta})^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

De bijbehorende verdelingsfunctie (cdf) is $F_{\theta}(x) = \frac{e^{x-\theta}}{1 + e^{x-\theta}}$.

- Laat zien dat deze familie een monotone likelihoodratio in x heeft.
 - Bepaal de meest onderscheidende (lotings)toets met onbetrouwbaarheid α_0 voor $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 2$ op basis van één waarneming x , en bereken het onderscheidend vermogen (power) van de toets voor $\alpha_0 = 0.10$.
 - Stel we nemen $x = 1$ waar. Wat is de p -waarde ten opzichte van de collectie toetsen uit (b)?
 - Bepaal de uniform meest onderscheidende (UMP) toets voor de hypothesen $H_0 : \theta \leq 0$ versus $H_1 : \theta > 0$ of bewijs dat zo'n toets niet bestaat.
3. Beschouw het volgende lineaire model:

$$Y_i = \theta x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

waarbij de fouten ε_i iid zijn verdeeld met $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ voor alle i , en de x_i bekende getallen zijn, met $x_i \neq 0$ voor alle i .

- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter van θ gegeven wordt door $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^4}$.

We gaan er voor de volgende deelvragen vanuit dat de fouten ε_i iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ zijn verdeeld, met bekende σ^2 . Het kan van pas komen om te weten dat de dichtheid van een $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verdeelde variabele gegeven wordt door

$$p_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter tevens de meest aannemelijke schatter (MLE) is voor θ .
- Bepaal de Fisher-informatie in de hele waarneming $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.
- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter voldoende is voor θ .
- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter UMVZ is voor θ .