Herkansing Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

12 maart 2018, 14:00–17:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.** Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken, behalve als er expliciet naar het bewijs van die stelling wordt gevraagd. Als je een voorbeeld of tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...). **Controleer** zoveel mogelijk je antwoorden. Er zijn **6 opgaven**. Indicatieve normering: 15+15+15+15+15+15 =90. Succes!

1. Laat $a = (1, 2, 3, 4)$ en $v = (3, 7, 9, 4)$ in $\mathbb{R}^4$. Laat $s := s_{L(a)} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de spiegeling in de lijn $L(a)$ zijn.

   (a) Bepaal de projecties van v op $L(a)$ en op $a^\perp$.

   (b) Bepaal $s(v)$.

   (c) Geef de eigenwaarden van s, en van elke eigenruimte een basis (hint: ga niet zomaar rekenen, maar denk eerst na).

   (d) Bepaal $\det(s)$.

2. Laat $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de gereduceerde rijtrapvorm van A.

   (b) Bepaal de rang van A.

   (c) Geef een basis van $\ker(A)$.

3. Laat $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

4. Laat, voor $t \in \mathbb{R}$, $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t-5 \\ -t & 6 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en laat $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Bepaal voor elke $t \in \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^2 : A_t{\cdot}x = b\}$.

5. Laat $C = (w_1, w_2)$ de basis zijn van $\mathbb{R}^2$ met $w_1 = (3, 2)$, $w_2 = (1, 1)$. Laat $B = (v_1, v_2, v_3)$ de basis van $\mathbb{R}^3$ zijn met $v_1 = (1, 0, 0)$ en $v_2 = (1, 1, 0)$ en $v_3 = (1, 1, 1)$. Je hoeft niet te controleren dat C en B bases zijn. Laat $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding zijn met

$$[f]_C^B = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 10 & 21 & 33 \end{pmatrix}.$$

   (a) Geef de formule voor $[f]_{E_2}^{E_3}$ in termen van $[f]_C^B$ en de basisveranderingsmatrices.

   (b) Bepaal $[f]_{E_2}^{E_3}$.

6. (a) Laat V een eindig-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en W_1 en W_2 deelruimten van V. Bewijs de stelling dat $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

   (b) Laat V een eindig-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en $U \subset V$ en $W \subset V$ deelruimten waarvoor geldt dat $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$. Bewijs dat er een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ is met $\ker(f) = W$ en $\mathrm{im}(f) = U$.