Tentamen Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

18 januari 2018, 10:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.** Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een voorbeeld of tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...). **Controleer** zoveel mogelijk je antwoorden.

Er zijn **5 opgaven**. Indicatieve normering: 15+10+30+20+15 =90. Succes!

1. Laat $a = (4, 2, 1, -2)$ en $v = (3, 3, 5, -1)$ in $\mathbb{R}^4$. Laat $s := s_{a^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de spiegeling in het hypervlak $a^\perp$ zijn.

   (a) Bepaal $s(v)$, en $v + s(v)$.

   (b) Bepaal de projectie van v op $a^\perp$.

   (c) Geef de eigenwaarden van s, en van elke eigenruimte een basis (hint: ga niet zomaar rekenen, maar denk eerst na).

   (d) Bepaal $\det(s)$.

2. Laat $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de gereduceerde rijtrapvorm van A.

   (b) Geef een basis van $\ker(A)$.

   (c) Bepaal de rang van A.

3. Laat $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte zijn gegeven door $U = \{(\beta, \alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Laat $V \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte zijn gegeven door $V = \{(0, \gamma, \delta, \gamma) : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Geef een basis b_1, b_2 van U, en een basis c_1, c_2 van V (en vergeet niet de nodige argumenten te geven).

   (b) Laat zien dat b_1, b_2, c_1, c_2 een basis B van $\mathbb{R}^4$ is.

   (c) Laat zien dat U en V complementaire deelruimten van $\mathbb{R}^4$ zijn.

   (d) Bewijs dat er een unieke lineaire afbeelding $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is, met de eigenschappen: voor alle $u \in U$ geldt $f(u) = u$, en voor alle $v \in V$ geldt $f(v) = 0$.

   (e) Geef de matrix van f ten opzichte van de basis B.

   (f) Laat E de standaardbasis E van $\mathbb{R}^4$ zijn. Druk $[f]_E^E$ uit in $[f]_B^B$ en de basisveranderingsmatrices.

   (g) Bereken de matrix $[f]_E^E$.

   (h) Laat $w = (1, 2, 3, 4)$. Bereken $f(w)$, en controleer dat $w - f(w) \in V$.

4. Laat $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

   (c) Geef een voorbeeld van een $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ die niet diagonaliseerbaar is.

5. (a) Geef de matrix ten opzichte van de standaardbasis van een rotatie in $\mathbb{R}^2$ over een hoek ϕ.

   (b) Laat V een $\mathbb{R}$-vecorruimte zijn, $n \in \mathbb{N}$, en $f \colon \mathbb{R}^n \to V$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat f injectief is precies dan als $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ lineair onafhankelijk zijn.

   (c) Laat V een eindig dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en $U \subset V$ een deelruimte. WAAR of ONWAAR: er is een lineaire afbeelding $f \colon V \to V$ met $\ker(f) = U$. Geef een bewijs als je voor WAAR kiest, en een tegenvoorbeeld als je voor ONWAAR kiest. Vergeet niet eerst duidelijk je keuze te vermelden.