Uitwerkingen tentamen lineaire algebra 2, 19 januari 2018

Opgave 1. (8 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

Fout: De methode uit hoofdstuk 8 (Theorem 8.26) geeft wel een matrix Q waarvoor $QAQ^\top$ diagonaal is, maar er is geen reden dat die methode een Q geeft die orthogonaal is.

Uitwerking: We gebruiken de methode van hoofdtuk 10, zoals in Example 10.10. Het karakteristiek polynoom van A is $x^2+x+6 = (x+3)(x-2)$, dus de eigenwaarden zijn 2 en -3. De eigenruimte voor eigenwaarde 2 wordt voortgebracht door $(2,1)$ en de de eigenruimte voor eigenwaarde -3 door $(-1,2)$. Deze hebben beide lengte $\sqrt{5}$, dus vinden we twee genormaliseerde eigenvectoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ en $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$. Neem basis $B = (v_1, v_2)$ en zij E de standaardbasis. Als we v_1 en v_2 als kolommen in een matrix zetten krijgen we

$$P = [\mathrm{id}]_E^B = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Het is makkelijk te checken dat P orthogonaal is (d.w.z. $P^\top P = I_2$, dus $P^\top = P^{-1}$); dat volgt ook uit het feit dat eigenvectoren voor verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan (Lemma 10.2(3)).

Van Lineaire Algebra 1 weten we dan

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = [f_A]_B^B = [\mathrm{id}]_B^E \cdot [f_A]_E^E \cdot [\mathrm{id}]_E^B = P^{-1}AP.$$

Dus $A = PDP^{-1} = PDP^\top = Q^\top DQ$ voor

$$Q = P^\top = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. (10 punten) Zij n een positief geheel getal en A een reële $n \times n$ matrix. De volgende tabel bevat voor enkele deelruimtes van $\mathbf{R}^n$ de dimensie.

U	$\dim U$
$\ker A$	3
$\ker A^2$	3
$\mathrm{im}\, A^3$	8
$\ker(A - 2I_n)$	3
$\ker(A - 2I_n)^2$	6
$\ker(A - 2I_n)^3$	7
$\ker(A - 3I_n)^2$	1

(a) Bewijs dat er geldt $\ker A = \ker A^2 = \ker A^3$.
(b) Bewijs dat $n = 11$.
(c) Bewijs dat A een Jordan-normaalvorm heeft over $\mathbf{R}$.
(d) Bewijs dat de Jordan-normaalvorm, op de volgorde van de Jordanblokken na, uniek bepaald is door de informatie uit de tabel. Geef ook een Jordan-normaalvorm voor A.

Uitwerking

(a) Er geldt $\ker A \subset \ker A^2$. Uit $\dim\ker A = \dim\ker A^2$ volgt dan $\ker A = \ker A^2$. Er geldt ook $\ker A^2 \subset \ker A^3$. Neem om de omgekeerde inclusie te bewijzen een element $x \in \ker A^3$. Dan geldt $Ax \in \ker A^2 = \ker A$, dus geldt $A^2x = 0$, waaruit volgt $x \in \ker A^2$. Dit bewijst $\ker A^3 \subset \ker A^2$, dus er geldt gelijkheid.

(b) Uit (a) en de dimensiestelling volgt $n = \dim\ker A^3 + \dim\operatorname{im} A^3 = \dim\ker A + \dim\operatorname{im} A^3 = 3 + 8 = 11$.

(c) Uit $\dim\ker A^3 = 3$ volgt dat de dimensie van de gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 0 minstens 3 is. Wegens $\dim\ker(A - 2I_n)^3 = 7$ is de dimensie van die voor eigenwaarde 2 minstens 7. Wegens $\dim\ker(A - 3I_n)^2 = 1$ is de dimensie van die voor eigenwaarde 3 minstens 1. De doorsnede van twee gegeneraliseerde eigenruimtes voor verschillende eigenwaarden is 0, dus de som van deze drie gegeneraliseerde eigenruimtes is een directe some en heeft dimensie minstens $3 + 7 + 1 = 11$. Omdat deze som bevat is in de ruimte $\mathbf{R}^{11}$ van dimensie 11, is deze som gelijk aan $\mathbf{R}^{11}$, dus $\mathbf{R}^{11}$ is de directe som van gegeneraliseerde eigenruimtes van A, dus A heeft een Jordan-normaalvorm over $\mathbf{R}$.

(d) Uit (c) volgt ook dat de gegeneraliseerde eigenruimtes voor de eigenwaardes 0, 2 en 3 dimensies respectievelijk 3, 7 en 1 hebben. Definieer $r_j(\lambda)$ als $r_j(\lambda) = \dim\ker(A - \lambda I_n)^j$ en $s_j(\lambda) = r_j(\lambda) - r_{j-1}(\lambda)$ en $t_j(\lambda) = s_j(\lambda) - s_{j+1}(\lambda)$. Wegens Remark 5.3 is $t_j(\lambda)$ gelijk aan het aantal Jordanblokken van grootte $j \times j$.

Er geldt $r_0(0) = 0$ en $r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 3$, dus $s_1(0) = 3$ en $s_2(0) = s_3(0) = 0$ en $t_1(0) = 3$ en $t_2(0) = 0$. Er zijn dus 3 blokken van grootte 1×1 voor eigenwaarde 0.

Er geldt $r_0(2) = 0$ en $r_1(2) = 3$ en $r_2(2) = 6$ en $r_3(2) = 7$. Omdat de gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 2 dimensie 7 heeft volgt ook $r_j(2) = 7$ voor $j > 3$. Dus $s_1(2) = 3$ en $s_2(2) = 3$ en $s_3(2) = 1$ en $s_4(2) = 0$, en dus $t_1(2) = 0$ en $t_2(2) = 2$ en $t_3 = 1$. Er zijn dus 2 blokken van grootte 2×2 en een blok van grootte 3×3 voor eigenwaarde 2.

De gegeneraliseerde eigenruimte voor eigenwaarde 3 heeft dimensie 1 en bestaat dus alleen uit een blok van grootte 1×1. Dit betekent dat de Jordan-normaalvorm inderdaad op volgorde van de blokken na vast ligt. Een zo'n vorm is

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}.$$

Opgave 3. (9 punten) Zij $U \subset \mathbf{R}^6$ de lineaire deelruimte opgespannen door

$$\begin{aligned} u_1 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ u_2 &= (0, 3, -2, 1, 2, 0), \\ u_3 &= (1, -3, 1, -2, -1, -1). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis voor U.

(b) Zij $\pi \colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$ de orthogonale projectie op U (dat wil zeggen, als $v \in \mathbf{R}^6$ gelijk is aan $u + u'$ met $u \in U$ en $u' \in U^\perp$, dan is $\pi(v) = u$).
Zij A de matrix waarvoor voor alle $v \in \mathbf{R}^6$ geldt $\pi(v) = Av$.
Bewijs dat A symmetrisch is. [Hint: dit kan zonder berekeningen.]

Uitwerking

(a) Met behulp van Gram-Schmidt (Theorem 9.9) vinden we

$$\begin{aligned} z_1 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ z_2 &= \tfrac{1}{3}(0, 0, -2, 1, 2, 0), \\ z_3 &= \tfrac{1}{6}(3, 0, -1, -4, 1, -3), \end{aligned}$$

dus (z_1, z_2, z_3) is een orthonormale basis voor U.

(b) Zij (z_4, z_5, z_6) een orthonormale basis voor $U^\perp$ (deze bestaat, want je kunt Gram-Schmidt toepassen op een willekeurig gekozen basis). Dan is $B = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ een orthonormale basis voor $\mathbf{R}^6$. Ten opzichte van deze basis is de matrix geassocieerd aan π gelijk aan

$$[\pi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Omdat deze matrix symmetrisch is, is π zelf-geadjungeerd (Corollary 9.24), dus is de matrix A geassocieerd aan π ten opzichte van de (orthonormale) standaardbasis E ook symmetrisch (wederom vanwege 9.24).

Opgave 4. (9 punten) Zij V een eindig-dimensionale inproductruimte.
Zij $f \colon V \to V$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt $f \circ f = \mathrm{id}_V$.

(a) Laat zien dat f diagonaliseerbaar is.

(b) Laat zien dat als f zelfgeadjungeerd is, dat f dan een isometrie is.
[Het Engels voor *zelfgeadjungeerd* is *self adjoint*.]

Uitwerking

(a) Voor het polynoom $p = x^2 - 1$ geldt $p(f) = f \circ f - \mathrm{id}_V = 0$, dus het minimum polynoom van f deelt p (Lemma 3.4). Omdat p het product van verschillende lineaire factoren is, is het minimum polynoom van f dat ook. Uit Proposition 3.8 volgt dat f diagonaliseerbaar is (omdat de matrix A geassocieerd aan f ten opzichte van een willekeurige basis diagonaliseerbaar is).

(b) Uit $f \circ f = \mathrm{id}_V$ volgt dat f zowel injectief als surjectief is, dus is f een isomorfisme en geldt er $f = f^{-1}$. Dus Als f zelf-geadjungeerd is, dan geldt $f^* = f = f^{-1}$, wat impliceert dat f een isometrie is (Proposition 9.20).

Opgave 5. (9 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte en $g\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Definieer de afbeelding $b\colon V \times V^* \to \mathbf{R}$ door $b(x, \varphi) = \varphi(g(x))$ voor $x \in V$ en $\varphi \in V^*$.

(a) Laat zien dat b bilineair is.

(b) Laat zien dat b niet-gedegenereerd is dan en slechts dan als g een isomorfisme is.

Uitwerking

(a) Er geldt

$$b(\lambda x + \mu y, \varphi) = \varphi(g(\lambda x + \mu y)) = \lambda\varphi(g(x)) + \mu\varphi(g(y)) = \lambda b(x, \varphi) + \mu b(y, \varphi)$$

en

$$b(x, \lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(g(x)) = \lambda\varphi(g(x)) + \mu\psi(g(x)) = \lambda b(x, \varphi) + \mu b(x, \psi).$$

De afbeelding b is dus inderdaad bilineair.

(b) Voor de afbeelding $b_R\colon V^* \to V^*$ geldt voor alle $x \in V$ en $\varphi \in V^*$:

$$\big(b_R(\varphi)\big)(x) = b(x, \varphi) = \varphi(g(x)) = (\varphi \circ g)(x),$$

dus $b_R(\varphi) = \varphi \circ g = g^\top(\varphi)$, dus $b_R = g^\top$. Als g een isomorfisme is, dan is $g^\top$ dat ook, dus is b_R dat ook, dus is b niet-gedegenereerd wegens Remark 8.8(2).

Als g geen isomorfisme is, dan is $\ker g$ niet nul, dus is er een $x \neq 0$ in V met $g(x) = 0$. Dan geldt voor alle $\varphi \in V^*$ dat

$$b_L(x)(\varphi) = \varphi(g(x)) = 0,$$

dus volgt $b_L(x) = 0$, dus $x \in \ker b_L$, dus b_L is niet een isomorfisme en b is dus wel gedegenereerd.