

## TENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 15 januari 2018, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

**Let op:** het cijfer voor dit tentamen is  $\min\{10, 1 + (\text{aantal punten})/10\}$ , waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(15 pt) **1.** In  $\mathbf{R}$  (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$X = [0, \infty), \quad Y = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \quad Z = \{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n > 0\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: begrensd, gesloten, compact, samenhangend, dicht in  $\mathbf{R}$ .

(18 pt) **2.** Zijn  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  en  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  twee genormeerde  $\mathbf{R}$ -vectorruimten. We bekijken de productverzameling  $V = V_1 \times V_2$ . Je mag gebruiken dat  $V$  een  $\mathbf{R}$ -vectorruimte is onder de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \quad \text{voor alle } v_1, w_1 \in V_1 \text{ en } v_2, w_2 \in V_2, \\ c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2) \quad \text{voor alle } c \in \mathbf{R}, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Bekijk de functie  $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbf{R}$  gedefinieerd door  $\|(v_1, v_2)\| = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_2$ .

(a) Laat zien dat  $\|\cdot\|$  een norm op  $V$  is.

(b) Stel dat  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  en  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  Banachruimten zijn. Laat zien dat  $(V, \|\cdot\|)$  een Banachruimte is.

(20 pt) **3.** Voor elke eindige deelverzameling  $S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  definiëren we een deelverzameling  $U_S \subseteq \mathbf{Z}$  door  $U_S = \mathbf{Z} \setminus S$ . Zij  $\mathcal{T}$  de collectie deelverzamelingen van  $\mathbf{Z}$  gedefinieerd door  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U_S \mid S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ eindig}\}$ .

(a) Laat zien dat  $\mathcal{T}$  een topologie op  $\mathbf{Z}$  is.

(b) Laat zien dat  $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$  compact is.

(18 pt) **4.** Zij  $X$  een topologische ruimte, zij  $\sim$  een equivalentierelatie op  $X$ , en zij  $Q = X/\sim$  de quotiëntruimte.

(a) Stel dat  $X$  discreet is. Bewijs dat  $Q$  discreet is.

(b) Stel dat  $X$  samenhangend is. Is  $Q$  noodzakelijk samenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(c) Geef een voorbeeld waarin  $X$  een Hausdorffruimte is, maar  $Q$  niet.

(15 pt) **5.** (a) Bewijs dat elke weg in  $\mathbf{Q}$  constant is ( $\mathbf{Q}$  heeft de deelruimtetopologie van  $\mathbf{R}$ ).

(b) Zij  $X$  een topologische ruimte, en zijn  $f, g: X \rightarrow \mathbf{Q}$  twee continue afbeeldingen. Stel dat  $f$  en  $g$  homotoop zijn. Bewijs dat  $f$  en  $g$  gelijk zijn.

(20 pt) **6.** We bekijken de afbeelding  $p: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$  gedefinieerd door  $p(z) = e^{2\pi iz}$ .

(a) Bewijs dat  $p$  een overdekkingsafbeelding is. (*Hint:*  $e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbf{Z}$ .)

(b) Zij  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$  de lus met basispunt  $x_0 = 1$  gegeven door  $\gamma(s) = e^{2\pi is}$ . Bepaal  $Y = p^{-1}\{x_0\}$ , en bepaal voor elke  $y \in Y$  de lift  $\tilde{\gamma}_y$  van  $\gamma$  (met betrekking tot de overdekkingsafbeelding  $p$ ) met beginpunt  $y$ .

**Succes!**