Tentamen Wiskundige Structuren 2017-2018

Vrijdag 12 januari 2018, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt, tenzij expliciet in de vraag vermeld staat dat dit niet hoeft. Dit tentamen bestaat uit **5** *opgaven.*

Het tentamen is in te zien tussen 22 en 31 januari 2018. Gelieve hiervoor contact op te nemen met de docent.

Vraag 1 [19p]

Zij $c \in \mathbb{R}$. Laat $g : (-\infty, c] \to \mathbb{R}$ en $h : [c, \infty) \to \mathbb{R}$ twee functies zijn. Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{als } x \leq c, \\ h(x), & \text{als } x > c. \end{cases}$$

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:
(a) als g en h allebei injectief zijn, dan is f injectief;
(b) als g surjectief is, dan is f surjectief;
(c) als f begrensd is, dan zijn g en h allebei begrensd;
(d) als g en h allebei uniform continu zijn en $g(c) = h(c)$, dan is f uniform continu.

Vraag 2 [26p]

Definieer de functie $f : [0,1] \to [0,1]$ door $f(x) = \frac{x}{2-x}$ en definieer verder voor iedere $n \geq 1$ de functie $f_n : [0,1] \to [0,1]$ door $f_n(x) = \frac{x}{2^n - (2^n - 1)x}$.
(a) Bereken $f \circ f$.
(b) Bewijs dat voor iedere $n \geq 1$ geldt dat $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ keer}}$.

Definieer de functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ door $g(1) = 1$ en $g(x) = 0$ voor $x \in [0,1)$.
(c) Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n \geq 1}$ puntsgewijs convergeert naar g.
(d) Bewijs of weerleg dat de functierij $(f_n)_{n \geq 1}$ uniform convergeert naar g.

Vraag 3 [12p]

Bewijs dat de relatie $\sim$ op $\mathbb{Z}$ gegeven door $a \sim b$ dan en slechts dan als $2a + 5b \equiv 0 \pmod 7$ een equivalentierelatie is.

Vraag 4 [12p]

Zij $\ell, c \in \mathbb{R}$ twee reële getallen, waarvoor geldt dat $0 < \ell < c < 1$. Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een reële rij zijn, waarvoor geldt dat $a_n > 0$ voor alle n en dat de rij $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \geq 0}$ convergent is met limiet $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.
(a) Bewijs dat er een $N_1 \in \mathbb{N}$ bestaat, zodat $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < c$ voor alle $n \geq N_1$.
(b) Bewijs dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent is met $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

z.o.z.

Vraag 5 [21p]

Zij $c \in \mathbb{R}$ en laat $X \subseteq \mathbb{R}$ een niet-lege, begrensde verzameling zijn.
(a) Bewijs dat $\sup(\{c\} \cup X) = \max\{c, \sup X\}$.

Laat $(a_n)_{n \geq 0}$ een begrensde reële rij zijn. Laat twee reële rijen $(s_n)_{n \geq 0}$ en $(t_n)_{n \geq 0}$ gegeven zijn door

$$s_n = \sup\{a_k \,:\, k \geq n\} \quad \text{en} \quad t_n = \inf\{a_k \,:\, k \geq n\}.$$

(b) Formuleer de Monotone Convergentiestelling.
(c) Bewijs dat de rij $(s_n)_{n \geq 0}$ convergent is.

Ook de rij $(t_n)_{n \geq 0}$ is convergent. Dit hoef je niet te bewijzen.
(d) Bewijs dat als $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} t_n$, dat dan $(a_n)_{n \geq 0}$ convergent is.

N.B. $\lim_{n \to \infty} s_n$ heet de *limes superior* en $\lim_{n \to \infty} t_n$ de *limes inferior* van de rij $(a_n)_{n \geq 0}$.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

Succes!