

Hertentamen Algebra 3
Woensdag 4 juli 2018

Dit is een open-boektentamen, maar je mag **niet** zonder uitleg naar opgaven verwijzen. Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je eraan komt. Elektronische hulpmiddelen, inclusief rekenmachines en telefoons, zijn **niet** toegestaan. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Alle opgaven zijn evenveel waard.

1. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^6 - 6$ over de volgende lichamen: (a) \mathbb{C} , (b) \mathbb{R} , (c) \mathbb{Q} , (d) \mathbb{F}_5 , (e) \mathbb{F}_7 .

2. Zij $f \in \mathbb{Q}[X]$ het irreducibele polynoom $X^3 + X^2 - 2X - 1$.
 - (a) Zij $\alpha \in \mathbb{C}$ een nulpunt van f . Laat zien dat $\alpha^2 - 2$ ook een nulpunt van f is.
 - (b) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is.
 - (c) Wat is de Galoisgroep van de uitbreiding $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$? Geef expliciete voortbrengers en beschrijf de groepsstructuur.

3. Zij ζ_{17} een primitieve 17-de eenheidswortel in \mathbb{C} .
 - (a) Schrijf $\sqrt{17}$ als een \mathbb{Q} -lineaire combinatie van machten van ζ_{17} .
 - (b) Zij $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{17})$ het unieke deellichaam met $[K : \mathbb{Q}] = 8$. Geef een $\alpha \in K$ met $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
 - (c) Wat is het minimumpolynoom van ζ_{17} over K ?

4. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:
 - (a) Een niet-normale eindige uitbreiding van lichamen met karakteristiek $p > 0$;
 - (b) een oneindige algebraïsche lichaamsuitbreiding;
 - (c) een Galoisuitbreiding met Galoisgroep A_5 .