Tentamen Algebra 3
Maandag 11 juni 2018

Dit is een open-boektentamen, maar je mag **niet** zonder uitleg naar opgaven verwijzen. Bewijs je antwoorden en leg uit hoe je eraan komt. Elektronische hulpmiddelen, inclusief rekenmachines en telefoons, zijn **niet** toegestaan. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Alle opgaven zijn evenveel waard.

1. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^4 - 2X^2 + 2$ over de volgende lichamen: (a) $\mathbb{C}$, (b) $\mathbb{R}$, (c) $\mathbb{Q}$, (d) $\mathbb{F}_5$, (e) $\mathbb{F}_7$.

2. Laat $\sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$ de reële derdemachtswortel van 7 zijn, en $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Definieer $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{7}) \subset \mathbb{C}$.

(a) Laat zien dat $K/\mathbb{Q}$ een ontbindingslichaam is voor het polynoom $X^3 - 7$.

(b) Laat zien dat $\alpha = \omega + \sqrt[3]{7}$ een voortbrenger is voor $K/\mathbb{Q}$.

(c) Bereken het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ en over $\mathbb{Q}(\omega)$.

3. (a) Zij p een priemgetal en zij $\zeta_p \in \mathbb{C}$ een primitieve p-de eenheidswortel. Laat zien dat er een deellichaam $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$ bestaat met $K/\mathbb{Q}$ cyclisch van graad 5 dan en slechts dan als $p \equiv 1 \pmod 5$.

(b) Zij $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{11})$ het unieke deellichaam met $K/\mathbb{Q}$ cyclisch van graad 5, zoals in (a). Bepaal een expliciete $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_{11})$ met $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, en laat zien dat K omvat is in $\mathbb{R}$.

(c) Is iedere cyclische uitbreiding van $\mathbb{Q}$ van graad 5 omvat in een $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ zoals in (a)?

4. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:

(a) Een niet-separabele, niet-normale lichaamsuitbreiding;

(b) een expliciete isomorfisme $\mathbb{F}_7[X]/(X^2 + 1) \to \mathbb{F}_7[X]/(X^2 - 3)$;

(c) een polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ met $\mathrm{Gal}(f) \cong S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.