

Hertentamen Inleiding Statistiek 2018-2019

Toegestane hulpmiddelen: een eenvoudige rekenmachine. Geen boeken, aantekeningen, grafische rekenmachines, telefoons, smart watches of andere hulpmiddelen.

Licht al je antwoorden toe.

1. De stochastische grootheden X_1, X_2, \dots, X_n zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta c^\theta x^{-(\theta+1)} \mathbf{1}\{x \geq c\}.$$

Hierin is $\theta > 1$ een onbekende parameter, en $c > 0$ een bekende constante.

- Bepaal een momentenmethodeschatter van θ .
 - Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor θ .
 - Toon aan dat $\prod_{i=1}^n X_i$ een voldoende en volledige statistiek voor θ is.
 - Is $\prod_{i=1}^n X_i$ minimaal voldoende voor θ ?
 - Toon aan dat als $c = 1$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ UMVZ is voor $\frac{1}{\theta}$.
 - Bereken de Fisher-informatie in de gehele waarneming (X_1, \dots, X_n) .
 - Bepaal een $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -Wald-interval voor θ .
 - Beschrijf hoe de intervallen uit de vorige deelvraag gebruikt kunnen worden om de hypothese $H_0 : \theta = 2$ te toetsen bij onbetrouwbaarheid α .
2. Zij X een continu verdeelde stochast met dichtheid $p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}\{0 \leq x \leq \theta\}$, met $\theta > 0$ onbekend. Bepaal de Bayesschatter voor θ relatief aan de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = c^2 \theta e^{-c\theta}$, waar $c > 0$ een bekende constante is.

3. Zij X een stochast. Onder de nulhypothese veronderstellen we de volgende kansmassafunctie:

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
$\mathbb{P}_{H_0}(X = x)$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.95

Onder de alternatieve hypothese veronderstellen we de volgende kansmassafunctie:

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
$\mathbb{P}_{H_1}(X = x)$	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.85

- Bepaal de meest onderscheidende (lotings)toetsen met onbetrouwbaarheidsdrempel gelijk aan 0.05, en met onbetrouwbaarheidsdrempel gelijk aan 0.10.
 - Bepaal het onderscheidend vermogen (power), tegen het gegeven alternatief, van de toetsen uit onderdeel (a).
4. We beschouwen het volgende lineaire regressiemodel: $Y_i = 2 + \theta x_i + \varepsilon_i$, waarbij de x_i strikt positieve, bekende constanten zijn, en de ε_i i.i.d. homogeen verdeeld zijn op $[0, 1]$ (de dichtheid is dus gelijk aan 1 op $[0, 1]$, en gelijk aan 0 daarbuiten).
- Bepaal de kleinste kwadratenschatter van θ .
 - Laat zien dat er voor $n = 1$ geen unieke meest aannemelijke schatter (MLE) van θ bestaat.