Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, maandag 21 januari 2019, 14.00–17.00 uur

Motiveer je antwoorden, en vermeld welke stellingen je gebruikt.

1. Bepaal in de ring van gehele getallen van Gauss $\mathbf{Z}[i]$ de ggd van $9+100i$ and $100+8i$.

2. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_4 \in \mathbf{C}$ de complexe nulpunten zijn van $f = X^4 - X - 1$.
a. Bereken $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^4$.
b. Bereken de discriminant van f.

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welk van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_5[X]$ het priem is:

$$(X^4 + 4X + 6), \qquad (X^4 + 4X + 6,\ X - 1), \qquad (X^4 + 4X + 6,\ X - 2).$$

(Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden met motivatie verwacht....)

4. Zij $A \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : x + 2y + 2z \equiv 0 \bmod 4 \text{ en } x + y + z \equiv 0 \bmod 8\}.$$

a. Bepaal een basis voor de abelse groep A.
b. Bepaal de structuur (als product van cyclische groepen) van de groep $\mathbf{Z}^3/A$.

5. Zij $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{10}$ de complexe matrix met coëfficiënten $a_{ij} = ij$. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van M.