Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, donderdag 14 maart 2019, 14.00–17.00 uur

Motiveer je antwoorden, en vermeld welke stellingen je gebruikt.

1. Hoeveel verschillende ringhomomorfismen $f : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}/210\mathbf{Z}$ bestaan er?

2. Zij $f = X^3 + 14X^2 + 3X + 19 \in \mathbf{C}[X]$ het polynoom van de dag, met ontbinding $f = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \in \mathbf{C}[X]$.

a. Laat zien dat de drie complexe nulpunten α_1, α_2 en α_3 van f verschillend zijn.
b. Bereken $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^3$.

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welk van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_{11}[X]$ het priem is:

$$(X^4 - 4X + 6), \qquad (X^4 - 4X + 6,\ X + 1), \qquad (X^4 - 4X + 6,\ X + 2).$$

(Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden met motivatie verwacht....)

4. Zij $R \subset \mathbf{Q}$ de verzameling $\{\frac{a}{5^k} \in \mathbf{Q} : a, k \in \mathbf{Z}, k \geq 0\}$.

(a) Bewijs dat R een deelring is van $\mathbf{Q}$ die $\mathbf{Z}$ bevat.
(b) Laat $I = (3)$ en $J = (5)$ de hoofdidealen van R zijn voortgebracht door 3 en 5. Zijn de quotiëntringen R/I en R/J eindig?
(c) Bepaal de eenhedengroep R^* van R.

5. Zij $A \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : x + 3y + 3z \equiv 0 \bmod 9 \text{ en } x + y + z \equiv 0 \bmod 27\}.$$

a. Bepaal een basis voor de abelse groep A.
b. Bepaal de structuur (als product van cyclische groepen) van de groep $\mathbf{Z}^3/A$.