Tentamen Analyse 1W

Maandag 28 januari 2019, 14:00–17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f\colon [-2,\infty) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2|x|, & -2 \leq x \leq 1, \\[2ex] \dfrac{x^2 - 6x + 17}{4x + 2}, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is in 1.

(b) Is f continu in 1? Beargumenteer!

(c) Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f.

(d) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 De functie $g\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1 - x^2), & 0 < x < 1, \\[2ex] \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Toon aan dat g inverteerbaar is en bepaal de inverse van g.

3 Bepaal het convergentie-interval van de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n}{2^n + n} x^n.$$

4 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

5 Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integralen:

(a) $\displaystyle\int (1+x^2)\left(e^x + e^{-x}\right)\, \mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{x})^6}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 16x + 8}{x^4 - 16}\, \mathrm{d}x$.

6 (a) Bepaal de volgende limiet:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^3 \ln(1+x)} - \sqrt{2x^4 + 1}}{x^5 + x^4}.$$

(b) Geef het tweedegraads Taylorpolynoom van de functie $x \mapsto e^{x^2+x}$ rond het punt $a = 1$.

(c) Formuleer de Middelwaardestelling (= Mean Value Theorem).

(d) Toon met behulp van (een gevolg van) de Middelwaardestelling aan dat

$$(1+2x)^x > (3\ln 3 + 2)x + 1 - 3\ln 3 \quad \text{voor alle } x \in (1, \infty).$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud), cijfer = aantal punten/8

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	19 (4+2+4+9)	7	6	12 (6+6)	19 (5+6+8)	17 (4+4+3+6)	80