Tentamen Caleidoscoop

21 december 2018 (14.00 - 17.00 uur)

Beantwoord vragen helder en leesbaar.

Opgave 1
Voor welke reële getallen x geldt:

a) **(2p)** $\neg[x < 0 \Rightarrow x > -1]$

b) **(2p)** $x = 1 \Leftrightarrow x = -1$

Opgave 2

a) **(2p)** Geef een goede omschrijving van alle samenhangende vlakke grafen met evenveel knopen als takken. Ondersteun deze omschrijving eventueel met een schets.

b) **(3p)** Zij $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ een reële Cauchy-rij. Bewijs dat $\{a_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ ook Cauchy is. Hint: Cauchy-rijen zijn begrensd.

c) **(2p)** Formuleer het Lemma van Zorn.

Opgave 3
Schrijf in de vorm $a + bi$:

a) **(2p)** $\frac{1-i}{3+2i}$

b) **(3p)** $\left[\left(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos(-\frac{4\pi}{3})i\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right)\right]^{20181221}$

Opgave 4
Zij $p \in \mathbb{Z}_{>1}$ een priemgetal. Beschouw op $\mathbb{Z}$ de relatie $\sim_p$ gedefinieerd door:

$$a \sim_p b \Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : \; p^n | a \Leftrightarrow p^n | b \;] \,.$$

a) **(3p)** Laat zien dat dit een equivalentierelatie is.

b) **(3p)** Voor welke $x \in \mathbb{Z}$ geldt $x^2 \sim_p x^3$?

c) **(2p)** Beschrijf de eindige equivalentieklasse(n).

Opgave 5 (3p)
Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de parabool P die de grafiek is van de functie $y = x^2$. Laat zien dat voor elke verzameling $X \subset \mathbb{R}^2$ met $P \subset X$ geldt dat deze equipotent is met $\mathbb{R}$.

Zij S de verzameling van studenten die dit tentamen doen en $p(s)$ resp. $c(s)$ het totaal aantal behaalde punten resp. het cijfer van student $s \in S$. Dan zal gelden:

$$\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 1} : \forall s \in S : c(s) = \frac{p(s)}{3} + \epsilon.$$