

HERTENTAMEN DISCRETE BESLISKUNDE 2018

12 maart 2019

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Bij iedere opgave staat het aantal punten dat verdiend kan worden tussen vierkante haken. Vergeet niet je naam en studentnummer te schrijven op ieder vel dat je inlevert! Er mag bij dit tentamen een niet-programmeerbare rekenmachine worden gebruikt, evenals een exemplaar van het dictaat Discrete beslis-kunde. In het dictaat mogen geen (uitgebreide) aantekeningen zijn gemaakt; markeringen van enig soort en korte opmerkingen zijn wel toegestaan.

Veel succes!

Opgave 1

Het stadje Chelm wordt geregeerd door een gemeenteraad en een burgemeester. De raad bestaat uit zeven wethouders. De burgemeester maakt geen deel uit van de raad. Een wet in Chelm kan op twee manieren worden aangenomen:

1. Een meerderheid van de gemeenteraad heeft voor de wet gestemd en de bur-gemeester ondertekent de wet;
2. De gemeenteraad heeft de wet met minstens zes voorstemmen aangenomen. De burgemeester hoeft in dit geval de wet niet te ondertekenen.

In het geval de raad een wet aanneemt met minder dan zes voorstemmen, heeft de burgemeester dus de mogelijkheid om een veto uit te spreken door de wet niet te ondertekenen.

[4 pt.] Modelleer dit probleem als een enkelvoudig spel en bereken de Shapleywaarde voor alle spelers.

Opgave 2

Zij $G = (V, E)$ een normale graaf. We definiëren de *complementaire* graaf van G door $\bar{G} = (V, \bar{E})$ met $(v, w) \in \bar{E}$ precies als $(v, w) \notin E$. Een graaf heet *zelf-complementair* als G en \bar{G} isomorf zijn.

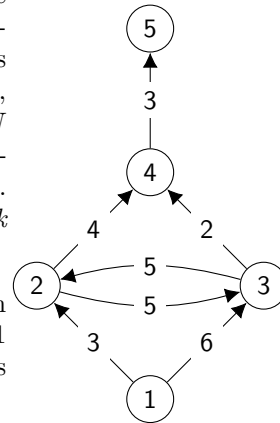
- (a) [2 pt.] Bewijs dat voor een zelf-complementaire graaf met n knopen moet gel-den dat $n \equiv 0 \pmod{4}$ of $n \equiv 1 \pmod{4}$.
- (b) [2 pt.] Zij G een zelf-complementaire graaf. Definieer de graaf $H = (V, E)$ door $V = \{1, 2, 3, 4\}$ en $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. Construeer G' door iedere knoop van G te verbinden met de knopen 2 en 3 in H . Bewijs dat G' zelf-complementair is.
- (c) [1 pt.] Concludeer dat als $n \equiv 0 \pmod{4}$ of $n \equiv 1 \pmod{4}$ geldt, $n \geq 0$, er een graaf met n knopen bestaat die zelf-complementair is.

Vergeet niet de opgaven op de achterkant!

Opgave 3

Oma Duck en Gijs Gans maken een roadtrip door Amerika. Ze willen de uren achter het stuur graag verdelen, en besluiten om bij iedere stad van chauffeur te wisselen. Lui als hij is, wil Gijs natuurlijk het aantal kilometers dat hij achter het stuur aflegt minimaliseren.

- (a) [2 pt.] Laat $N = (V, A)$ het wegennetwerk in Amerika zijn met l de afstand tussen steden. Stel dat Gijs begint met rijden. Modelleer het probleem om een route te vinden van een gegeven stad naar een andere gegeven stad zodanig dat Gijs zo min mogelijk kilometers achter het stuur doorbrengt als kortste pad probleem, m.a.w. construeer een netwerk N' aan de hand van N zodanig dat het vinden van een kortste pad in N' overeenkomt met het oplossen van het gegeven probleem. *Let op: N is een algemeen netwerk, niet het netwerk hiernaast!*



- (b) [3 pt.] Vind m.b.v. opgave a. en het algoritme van Dijkstra in nevenstaand netwerk een pad van stad 1 naar stad 5 dat het aantal geregen kilometers van Gijs minimaliseert. *Als opgave a. niet is gelukt, bepaal dan simpelweg een kortste pad van 1 naar 5 m.b.v. het algoritme van Dijkstra.*

Opgave 4

[4 pt.] Los het volgende geheeltallige LP-probleem op m.b.v. Gomory fractiesneden:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 \qquad \qquad - 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad \leq 5 \\ 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ en geheel} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Opgave 5

[2 pt.] Beschouw het volgende citaat:

Las u al de laatste van Hall over huwelijk en transversalen? Nee, ik wacht tot ze het vertalen!

Is het mogelijk om uit elk van de 18 woorden een letter te kiezen, zodanig dat de gekozen letters verschillend zijn? Leestekens tellen niet als letters, en we maken geen onderscheid tussen hoofd- en kleine letters. Bewijs je antwoord.

Opgave	1	2	3	4	5	Totaal
Punten	4	5	5	4	2	20