Herkansing Lineaire Algebra I (wiskunde)

Bas Edixhoven

11 maart 2019, 10:00–13:00

Geen rekenmachines, dictaat en aantekeningen. **Motiveer elk antwoord.** Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken. Als je een voorbeeld of tegenvoorbeeld geeft, dan moet je alle objecten daarin expliciet definiëren (het lichaam, de vectorruimte, de vectoren,...). **Controleer** zoveel mogelijk je antwoorden.

Er zijn **6 opgaven**. Indicatieve normering: $6 \times 15 = 90$. Succes!

1. Laat $a = (1, 1, 2, 2)$ en $v = (-4, -2, -1, -1)$ in $\mathbb{R}^4$. Laat $\pi_{a^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de projectie op $a^\perp$ zijn.

   (a) Bepaal $\pi_{a^\perp}(v)$.

   (b) Geef de matrix $[\pi_{a^\perp}]_E^E$ van $\pi_{a^\perp}$ ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$.

   (c) Geef de eigenwaarden van $\pi_{a^\perp}$, en van elke eigenruimte een basis (hint: ga niet zomaar rekenen, maar denk eerst na).

2. Laat $v_1 = (0, 1, 0, 3)$, $v_2 = (1, -1, 1, -2)$ en $v_3 = (2, -1, 3, -2)$ in $\mathbb{R}^4$, en laat $U = L(v_1, v_2, v_3)$ de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ zijn voortgebracht door v_1, v_2, v_3.

   (a) Bereken $d := \dim(U)$ en geef een basis $w_1, \ldots, w_d$ van U zodat de matrix in $\mathrm{Mat}(d \times 4, \mathbb{R})$ met rijen $w_1, \ldots, w_d$ in gereduceerde rijtrapvorm is.

   (b) Geef een basis van $U^\perp$.

   (c) Geef een $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times 4, \mathbb{R})$ zodat $U = \ker(A)$.

3. Laat $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis van de eigenruimte.

   (b) Geef een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix P, beide in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, zodat $A = PDP^{-1}$.

4. Laat, voor $t \in \mathbb{R}$, $A_t = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2 & t+1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en laat $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Bepaal voor elke $t \in \mathbb{R}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^2 : A_t \cdot x = b\}$.

5. Laat $\mathbb{R}[x]_3$ de $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn van polynomen van graad hoogstens 3. Laat

$$D\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$$

de lineaire afbeelding zijn gegeven door $D(f) = f'$, de afgeleide van f.

   (a) Laat E de standaardbasis $(1, x, x^2, x^3)$ zijn van $\mathbb{R}[x]_3$. Geef $[D]_E^E$.

   (b) Stel dat B en C ook bases zijn van $\mathbb{R}[x]_3$. Geef de formule voor $[D]_C^B$ in termen van $[D]_E^E$ en de basisveranderingsmatrices.

   (c) Geef een basis B zodat

$$[D]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) Geef bases B en C zodat

$$[D]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Laat V een $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn met $\dim(V) = 6$, en laat U en W deelruimten van V zijn met $\dim(U) = 3$ en $\dim(W) = 2$. Wat zijn dan de mogelijke dimensies van $U + W$? Geef voor elke mogelijke dimensie een voorbeeld van een V, U en W.

   (b) Laat V een eindig-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte zijn, en $U \subset V$ en $W \subset V$ deelruimten waarvoor geldt dat $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$. Bewijs dat er een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ is met $\ker(f) = W$ en $\mathrm{im}(f) = U$.

   (c) Geef een voorbeeld van een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte V en een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ met eigenwaarden 1 en 2 die niet diagonaliseerbaar is, en bewijs dat ook.