Tentamen lineaire algebra 2
18 april 2019, 14:00 – 17:00

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1. (8 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodanig dat $A = N + D$ en $ND = DN$.
(b) Bepaal e^A.

Opgave 2. (9 punten) Beschouw het inproduct op $\mathbf{R}^4$ gegeven door

$$\langle x, y \rangle = y^\top M x$$

voor alle $x, y \in \mathbf{R}^4$, met

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je hoeft niet te laten zien dat dit een inproduct is. Geef een orthonormale basis (ten opzichte van dit nieuwe inproduct) voor de deelruimte $U \subset \mathbf{R}^4$ gegeven door

$$U = \{ \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ \}.$$

Opgave 3. (9 punten) Zij V een reële vectorruimte. Zij $f\colon V \to V$ een automorfisme. Laat zien dat f een isometrie is dan en slechts dan als er geldt $f^* = f^{-1}$. (Pas op: in het boek staat dit als stelling, maar onder de extra aanname dat V eindig-dimensionaal is. Die stelling kun je hier dus niet gebruiken.)

Opgaven 4 en 5 staan op de volgende pagina

Opgave 4. (9 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte. Zij $f: V \to V$ een endomorfisme. Neem aan dat voor elke $v \in V$ geldt

$$f(f(v)) - f(v) = 2v.$$

Laat zien dat f diagonaliseerbaar is.

Opgave 5. (10 punten) Zij V een eindig-dimensionale reële vectorruimte van dimensie n. Zij $\varphi: V \times V \to \mathbf{R}$ een niet-gedegenereerde symmetrische bilineaire vorm. Zij $b \in V$ een niet-nul element en $f_b: V \to V$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$f_b(x) = x + \varphi(x, b) \cdot b.$$

(a) Laat zien dat de eigenruimte voor f behorende bij eigenwaarde $\lambda = 1$ dimensie $n - 1$ heeft.

(b) Laat zien dat f een Jordannormaalvorm heeft en bepaal deze Jordannormaalvorm. Onderscheid hierbij twee gevallen, namelijk

  (i) het geval dat b loodrecht staat op zichzelf, en

  (ii) het geval dat b niet loodrecht staat op zichzelf.