Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Vrijdag 4 januari 2019, 14:00-17:00

- Schrijf op ieder vel naam, studentnummer en studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook geen formules uit het boek zonder afleiding.
- Er worden exacte antwoorden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

---

1. Beschouw voor $\beta \in \mathbf{R}$ de inhomogene eerste orde vergelijking,

$$t\dot{x} + (1 + \beta t)x = t. \tag{1}$$

(a) Beschouw eerst het homogene probleem. Bepaal voor alle $\beta \in \mathbf{R}$ de algemene oplossing $x_{\mathrm{h},\beta}(t)$ van het homogene probleem.

(b) Neem nu $\beta = 1$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\mathrm{i},1}(t)$ van de inhomogene vergelijking (1).

(c) Neem $\beta \in \mathbf{R}$ en laat $x_{\mathrm{i},\beta}(t)$ de algemene oplossing zijn van (1). Voor welke $\beta \in \mathbf{R}$ bestaat $\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{i},\beta}(t)$? Wat is deze limiet?

2. Beschouw voor $\alpha \in \mathbf{R}$ de tweede orde vergelijking, dit is de zogeheten Legendre vergelijking

$$(1 - t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{2}$$

(a) Bepaal door middel van reeksontwikkelingen rond $t_0 = 0$ van de vorm $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ de twee onafhankelijke oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ van vergelijking (2) waarvoor geldt dat $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = 0$ en $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = 1$. Het is voldoende om een recurrente betrekking tussen de a_n te bepalen.

(b) Neem $\alpha \in \mathbf{N}$. Laat zien dat vergelijking (2) een polynomiale oplossing heeft van graad α.

(c) Het Legendre polynoom $P_\alpha(t)$ is gedefinieerd als de polynomiale oplossing van de Legendre vergelijking die voldoet aan $P_\alpha(1) = 1$. Bepaal $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$ en $P_3(t)$.

!! Vervolg op achterkant !!

3. Neem A een reële $n \times n$-matrix die voldoet aan $A^2 = -A$.

(a) Bewijs dat
$$\exp[At] = I - (e^{-t} - 1)A,$$
waarbij I de $n \times n$-eenheidsmatrixmatrix is.

(b) Bepaal de oplossing van
$$\dot{x} = Ax \quad \text{met als beginvoorwaarde} \quad x(0) = x_0 = (1, 0, 1)^T.$$
waarbij
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(c) Bekijk nu de inhomogene vergelijking
$$\dot{x} = Bx + f(t), \quad \text{met als beginvoorwaarde} \quad x(0) = x_0$$
voor een reële $n \times n$-matrix B, $f(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ voldoende glad, $x \in \mathbf{R}^n$. Bepaal de algemene oplossing.
Hint. Gebruik de 'variatie van constanten'-methode.

(d) Neem nu $B = A$ waarbij A de matrix uit (b) is. Neem ook x_0 zoals in (b) en $f(s) = e^{-s}(f_1, f_2, f_3)^T$. Waaraan moeten $f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{R}$ voldoen zodat geldt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?

4.) Beschouw voor het stelsel,
$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x - \frac{3y}{4(x+1)}), \\ \dot{y} &= y(y-1), \end{cases} \tag{4}$$
voor $x \geq 0$. Definieer $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T$ als de oplossing van (4) met beginvoorwaarden $(x_0,y_0)^T \in \mathbf{R}^2$, ofwel: $(x(0;(x_0,y_0)), y(0;(x_0,y_0)))^T = (x_0,y_0)^T$.

(a) Bepaal de vaste/equilibrium punten. Geef voor elk punt aan of het asymptotisch stabiel, stabiel of instabiel is.

(b) Geef voor elk vast punt een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt. Bepaal ook het bijbehorende karakter (zadel, centrum, focus of knoop) van dat vaste punt voor het gelineariseerde stelsel.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x,y)-vlak, $x \geq 0$, en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x,y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden $(x_0,y_0)^T$ waarvoor geldt dat $x_0 > 0$, $0 < y_0 < 1$ en $3y_0 < 4(1 - x_0^2)$. Bewijs voor al deze oplossingen dat er geldt dat
$\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T = (1,0)^T$.

(e) Bekijk nu oplossingen met beginvoorwaarden $(x_0,y_0)^T$ waarvoor geldt dat $x_0 \geq 0$ en $y_0 \leq 1$. Bepaal $\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T$.