Hertentamen Wiskundige Structuren 2018-2019

Vrijdag 1 februari 2019, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt, tenzij expliciet in de vraag vermeld staat dat dit niet hoeft. Dit tentamen bestaat uit **6** *opgaven.*

Het tentamen is in te zien tussen 11 en 18 februari 2019. Gelieve hiervoor contact op te nemen met de docent.

Vraag 1 [12p]

Als E een verzameling is, dan gebruiken we de notatie $\#E$ voor het aantal elementen van E. Dus er geldt $\#\{0, 1, 2, 3\} = 4$ en $\#\mathbb{R} = \infty$.

Laat $\mathcal{R}$ de verzameling van alle begrensde, niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Laat $f : \mathcal{R} \to \mathbb{N}$ de functie zijn gegeven door $f(E) = \#(E \cap \mathbb{N})$ voor $E \in \mathcal{R}$.

a) Bewijs of weerleg dat f injectief is.

b) Bewijs of weerleg dat f surjectief is.

Vraag 2 [12p]

Bewijs dat ieder geheel getal $n \geq 2$ geschreven kan worden als het product van priemgetallen, d.w.z. bewijs dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ een $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ en priemgetallen $p_1, \dots, p_k$ bestaan, zodat $n = \prod_{j=1}^{k} p_j$.

Vraag 3 [16p]

Laat $\sim$ de volgende relatie op $\mathbb{Z}$ zijn: voor $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt dat $n \sim m$ dan en slechts dan als $n + m$ een even getal is.

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

(b) Geef een quotiëntafbeelding $q : \mathbb{Z} \to \{1, 2\}$.

Vraag 4 [20p]

Definieer voor iedere $M \in \mathbb{N}$ de verzameling

$$B_M = \left\{ \frac{m}{2^n} \, : \, n \in \mathbb{N} \text{ en } m \in \mathbb{N} \text{ met } m \leq M \right\}.$$

(a) Bewijs dat $\max B_M$ bestaat voor iedere $M \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat er een reële rij $(x_n)_{n\geq 0}$ bestaat met $x_n \in \bigcup_{M\in\mathbb{N}} B_M$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(c) Bewijs dat er voor iedere $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ een element $x \in \bigcup_{M\in\mathbb{N}} B_M$ is, waarvoor geldt dat $a < x < b$.

(d) Bewijs dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}_{>0}$ een convergente reële rij $(y_n)_{n\geq 0}$ bestaat met $y_n \in \bigcup_{M\in\mathbb{N}} B_M$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

z.o.z.

Vraag 5 [16p]

Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ gegeven zijn en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(a) Bewijs dat voor iedere $x \in [a, b]$ de verzameling $\{f(t) : a \leq t \leq x\}$ een maximum heeft.

(b) Definieer de functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ door $g(x) = \max\{f(t) : a \leq t \leq x\}$. Bewijs dat g uniform continu is.

Vraag 6[14pt]

Laat $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ de functie zijn gegeven door $f(x) = 0$.

(a) Definieer voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$. Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergeert naar f.

(b) Definieer voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de functie $g_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ door $g_n(x) = \frac{1}{nx+1}$. Bewijs dat de functierij $(g_n)_{n\geq 0}$ puntsgewijs convergeert naar f, maar niet uniform convergeert naar f.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

Succes!