Tentamen Wiskundige Structuren 2018-2019

Vrijdag 11 januari 2019, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt, tenzij expliciet in de vraag vermeld staat dat dit niet hoeft. Dit tentamen bestaat uit **6** *opgaven.*

Het tentamen is in te zien tussen 21 en 29 januari 2019. Gelieve hiervoor contact op te nemen met de docent.

Vraag 1 [15p]

Bewijs dat de verzameling $\{n \in \mathbb{N} : 7|n \text{ en } 2|n\}$ aftelbaar oneindig is.

Vraag 2 [15p]

Definieer de rij $\{f_n\}_{n\geq 0}$ van Fibonacci-getallen als volgt: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ en voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geldt dat

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f_k = f_{2n-1} - 1.$$

Vraag 3 [15p]

(a) Bewijs de volgende uitspraak: voor iedere verzameling $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ geldt dat $\min A$ bestaat.
(b) Bewijs of weerleg de volgende uitspraak: voor iedere verzameling $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ geldt dat $\max A$ bestaat.

Definieer de relatie $\sim$ op $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ als volgt: voor $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ geldt $A \sim B$ dan en slechts dan als $\min A = \min B$.
(c) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(d) Geef een quotiëntafbeelding $q : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ voor $\sim$.

Vraag 4 [15p]

(a) Geef $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en geef $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$ in geval $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Je hoeft je antwoorden niet te bewijzen.

(b) Bewijs dat de rij $(x_n)_{n\geq 1}$ gegeven door $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ convergeert met $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

(Hint: gebruik de Insluitstelling en onderdeel (a).)

(c) Bewijs dat de rij $(y_n)_{n\geq 1}$ gegeven door $y_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ niet begrensd is.

Vraag 5 [15p]

Laat $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeven zijn en beschouw de functie $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
(a) Geef een waarde voor a zodat f uniform continu is. Bewijs je beweringen.
(b) Geef een waarde voor a zodat f continu is, maar niet uniform continu. Bewijs je beweringen.

z.o.z.

Vraag 6 [15p]

Definieer de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ en voor iedere $n \geq 1$ de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x < -n \text{ of } x \geq n, \\ 1 + \frac{x}{n}, & \text{als } -n \leq x < 0, \\ 1 - \frac{x}{n}, & \text{als } 0 \leq x < n. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ puntsgewijs convergeert naar f.
(b) Bewijs of weerleg dat de functie dat de functierij $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform convergeert naar f.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

Succes!