

Tentamen Analyse 1

Woensdag 8 januari 2020, 10:15–13:15 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
 - Er zijn **zeven** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
 - Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.
-

1 De functie $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \ln(x), & 0 < x < 1, \\ (x-1) \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right), & 1 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x^2 + 5x}, & x > 4. \end{cases}$$

- Toon aan dat f continu is in 4.
- Toon aan dat f differentieerbaar is in 1.
- Is f continu in 1? Beargumenteer!
- Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f .
- Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 Bepaal de volgende twee limieten:

- $\lim_{x \downarrow 0} \arctan \left(\frac{x}{\sin(x)} + x \ln(x) \right)$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^3 \right)^{\frac{1}{x - \sin(x)}}$.

3 Bepaal het convergentie-interval van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + n^2} x^n.$$

4 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2},$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 3n + 4}.$$

5 Bepaal de Taylorreeks van de functie $x \mapsto \arctan(x^2)$ rond 0. Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

6 Van een tien keer differentieerbare functie $f: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ en $f''(1) = 2$. Ook is gegeven dat $f'''(0) = 0$ en dat $x \mapsto f'''(x) - \frac{x}{1+x^2}$ dalend is op $[0, 2)$. Toon aan dat

$$f(x) \leq 1 + (x-1)^2 + \frac{1}{6} \frac{(x-1)^3}{1+x^2} \quad \text{voor alle } x \in (0, 1)$$

en dat

$$f(x) \leq 1 + (x-1)^2 + \frac{1}{12} x(x-1)^3 \quad \text{voor alle } x \in (1, 2).$$

7 Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

$$(a) \int_0^{\pi} x \sin(x) \cos^2(x) dx,$$

$$(b) \int \frac{21x^3 + 68x^2 + 80x + 40}{x^2(x^2 + 2x + 2)} dx,$$

$$(c) \int 2 \tan^2(x) + \frac{\sin(\tan(x))}{\cos^2(x)} dx.$$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	7	Totaal
Punten:	22	8	6	11	5	7	21	80
	(2+4+1+7+8)	(3+5)	(6)	(4+7)	(5)	(7)	(6+8+7)	