Tentamen Analyse 1

Maandag 27 januari 2020, 14:15–17:15 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zeven** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is **NIET** toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f : [-\frac{\pi}{4}, \infty) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & -\frac{\pi}{4} \le x \le 0, \\ \\ |x(x-1)|, & 0 < x \le 2, \\ \\ \dfrac{x^2}{2-x}, & x > 2. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0.

(b) Is f continu in 0? Beargumenteer!

(c) Toon aan dat er een $x \in [-\frac{\pi}{4}, \infty)$ bestaat zo dat $f(x) = -\frac{1}{8}$.

(d) Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f.

(e) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 De kromme K bestaat uit alle punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan

$$y^y - y\ln(e^x + x - 2) + 1 = 0.$$

Gegeven is hier dat voldoende dichtbij het punt $(2, 1)$ de kromme K de grafiek is van een differentieerbare functie f die gedefinieerd is op een open interval dat 2 bevat. Geef de vergelijking van de raaklijn aan de kromme K in het punt $(2, 1)$ in de vorm $y = rx + b$.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n)}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

4 Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!\,3^{3n}} x^n.$$

5 (a) Formuleer de stelling van Taylor.

(b) Bepaal de limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x) - \ln(1 + x^2)}{x^3\,(e^x - 1)}.$$

6 Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een continue functie $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is op (a, b) met $g'(x) < 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Toon aan dat voor alle $x, y \in [a, b]$ met $x \neq y$ geldt dat

$$(x - y)\,(g(x) - g(y)) < 0.$$

7 Bereken de volgende onbepaalde en oneigenlijke integralen:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x^3 + 5x^2 + 10x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 3)}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(\arctan(x))}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x) + \sin^2(x) + \sin(x) + 1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	7	Totaal
Punten:	20 (3+1+3+5+8)	5 (5)	13 (3+5+5)	6 (6)	10 (4+6)	4 (4)	22 (8+8+6)	80