# Tentamen Wiskundige Structuren 2019-2020

## Vrijdag 10 januari 2020, 14u15–17u15

*Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt. De puntenverdeling bij de opgaven is onder voorbehoud. Dit tentamen bestaat uit* **6** *opgaven.*

*Het tentamen is in te zien tussen 21 en 28 januari 2020. Gelieve hiervoor contact op te nemen met de docent.*

**Vraag 1 [10p]**

Zij $A$ en $B$ twee verzamelingen en $f : A \to B$ een functie.
(a) Bewijs of weerleg: als $f^{-1}(f(C)) = C$ voor iedere deelverzameling $C \subseteq A$, dan is $f$ injectief.
(b) Bewijs of weerleg: als $f(f^{-1}(D)) = D$ voor iedere deelverzameling $D \subseteq B$, dan is $f$ surjectief.

**Vraag 2 [20p]**

(a) Bewijs zonder gebruik te maken van de afgeleide dat voor iedere $x \in (0, \infty)$ geldt dat $x \geq \ln(1 + x)$.

(b) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geldt dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n + 1)$.

(c) Bewijs dat de rij $(\ln(n + 1))_{n\geq 1}$ naar oneindig divergeert en leidt hieruit af dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (dus dat ook de rij $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)_{n\geq 1}$ naar oneindig divergeert).

**Vraag 3 [13p]**

Laat $A$ de verzameling van alle convergente reële rijen zijn. Definieer de relatie $\sim$ op $A$ door voor ieder paar $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ in $A$ te stellen dat $(a_n)_{n\geq 0} \sim (b_n)_{n\geq 0}$ dan en slechts dan als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
(b) Geef een quotiëntafbeelding $q : A \to \mathbb{R}$ voor $\sim$ en bewijs dat $q$ een quotiëntafbeelding is.

**Vraag 4 [14p]**

Beschouw de verzameling

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \Big(\frac{(-1)^n}{n}, 2 + \frac{1}{n}\Big).$$

Geef $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ en $\max A$ of bewijs dat ze niet bestaan. Bewijs al je beweringen.

**Vraag 5 [11p]**

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee continue functies waarvoor geldt dat $f(q) = g(q)$ voor alle $q \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

**Vraag 6[22p]**

Laat voor iedere $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn en zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een functie.
(a) Bewijs dat als de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform naar de functie $f$ convergeert, dat $f$ dan uniform continu is.
Stel dat de functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{als } x \geq \frac{1}{n}, \\ n, & \text{als } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(b) Bewijs dat deze rij $(f_n)_{n\geq 1}$ puntsgewijs convergeert naar de functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.
(c) Bewijs of weerleg dat deze rij $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform naar $f$ convergeert.

Totaal: 90p + 10p = 100p.

**Succes!**