Tentamen Analyse 1

Vrijdag 8 januari 2021, 9:00–12:00 uur

- Lever iedere opgave als één pdf-file in op Brightspace.
- Schrijf aan het begin van de uitwerkingen van opgave 1 de volgende integriteitsverklaring en houd ruimte vrij voor je studentenkaart: *Dit examen wordt door mij alleen gemaakt, zonder hulp van derden, en zonder gebruik van andere bronnen dan welke expliciet zijn toegestaan door de docent. Tevens heb ik de integriteitsverklaring gelezen en getekend.*
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van het boek van Adams en van aantekeningen is toegestaan.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.

---

1 De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x+4}{x+2}, & x < -2, \\[2ex] -x^2-3x+3, & -2 \le x < 0, \\[2ex] 3e^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0.

(b) Is f continu in 0? Beargumenteer!

(c) Toon aan dat f een buigpunt heeft in $x = 0$.

(d) Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f.

(e) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

(f) De functie g is de restrictie van f tot $[-1, 1]$, dat wil zeggen:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2-3x+3, & -1 \le x < 0, \\[2ex] 3e^{-x}, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Bepaal het bereik B van g, ga na dat g van $[-1, 1]$ naar B inverteerbaar is en geef een functievoorschrift voor de inverse van g.

2 Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x^2-6x-8}{x(x-2)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln(n)}$.

4 Bekijk de functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = 12\sqrt{x} - x.$$

(a) Geef het tweedegraads Taylorpolynoom p van f rond $a = 4$ in de vorm $p(x) = c_0 + c_1(x-4) + c_2(x-4)^2$.

(b) Toon aan dat voor alle $x \in (1,4)$ geldt dat

$$\tfrac{3}{4}(x-4)^3 < f(x) - p(x) < \tfrac{3}{128}(x-4)^3.$$

5 Gegeven is de functie $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Beredeneer dat G differentieerbaar is en bereken $G'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{4n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Geef zorgvuldig aan welke stellingen je gebruikt.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	25 (4+1+2+6+7+5)	19 (5+6+8)	20 (4+5+5+6)	8 (4+4)	8 (3+5)	80