

# Tentamen Analyse 1

Donderdag 27 januari 2022, 14:15–17:15 uur

---

- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
  - Het gebruik van het boek van Adams (of kopieën daaruit) is toegestaan. Eigen aantekeningen en andere documenten zijn niet toegestaan.
  - Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan; een gewone rekenmachine mag wel worden gebruikt, maar elk antwoord moet exact worden berekend.
- 

1 De functie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x - 2}, & x < -1, \\ \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 - \sqrt{1 + x^4}, & x \geq 1. \end{cases}$$

- Toon aan dat  $f$  continu is in 0.
- Toon aan dat  $f$  differentieerbaar is in  $-1$ .
- Is  $f$  continu in  $-1$ ? Beargumenteer!
- Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van  $f$ .
- Toon aan dat  $f$  strikt stijgend is op  $(1, \infty)$ .
- Is  $f$  strikt stijgend op  $(\frac{3}{4}, \infty)$ ? Beargumenteer!
- Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van  $f$  en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 Bereken de volgende onbepaalde en oneigenlijke integralen:

(a)  $\int 2 \ln(2 + \sin(x)) \sin(x) \cos(x) dx,$

(b)  $\int \frac{x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 3}{x^5 + x^3} dx,$

(c)  $\int_1^2 \frac{1 + 8x}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

**Z.O.Z.**

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3+1},$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+n!},$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1},$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$

4 De functie  $g: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  is gegeven door

$$g(x) = \tan(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

(a) Geef het tweedegraads Taylorpolynoom  $p$  van  $g$  rond  $\frac{\pi}{4}$  in de vorm  $p(x) = c_0 + c_1(x - \frac{\pi}{4}) + c_2(x - \frac{\pi}{4})^2.$

(b) Toon aan dat voor alle  $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  geldt dat

$$g(x) - p(x) > \frac{8}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

(c) Geef het vierdegraads Taylorpolynoom van de functie  $x \mapsto x^2 \ln(1+2x)$  rond 0.

(d) Geef het derdegraads Taylorpolynoom van de functie  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1-x}$  rond 0.

5 De kromme  $K$  is gegeven door

$$x^2 + 6x + (2x + 6) \sin(y) + \sin^2(y) + y^2 + 8 = 0.$$

Toon aan dat er geen punt  $(a, b)$  op  $K$  bestaat zo dat in de buurt van  $(a, b)$  de kromme  $K$  samenvalt met een horizontaal lijnstuk.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	23	21	18	14	4	80
	(2+4+1+5+3+1+7)	(7+7+7)	(4+4+5+5)	(4+4+3+3)	(4)	