Tentamen Algebra 2, vrijdag 6 januari 2023, 9:00 tot 12:00 uur

Bij dit tentamen mogen de dictaten Algebra 1 en 2 en eigen aantekeningen gebruikt worden. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden. Dat wil zeggen, laat zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs ze. Geef duidelijke verwijzingen naar resultaten die je gebruikt en geef aan waarom aan de voorwaarden van de resultaten is voldaan.

Voor het gemak staan hier een aantal gelijkheden. Je hebt ze niet allemaal nodig:

$$\begin{array}{rclcrcl} 119 &=& 7 \cdot 17, & \quad & 2023 &=& 7 \cdot 17^2, \\ 17^2 - 7^2 &=& 2^4 \cdot 3 \cdot 5, & & 21 &=& 3 \cdot 7, \\ 7 + 17 &=& 2^3 \cdot 3, & & 7^2 + 17^2 &=& 2 \cdot 13^2. \end{array}$$

Opgave 1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibele factoren:

(a) 2023 in de ring $\mathbf{Z}[i]$,

(b) $7 + 17i$ in de ring $\mathbf{Z}[i]$.

(c) $6X^8 + 42X$ in de polynoomring $\mathbf{Z}[X]$,

(d) $XY^3 + Y^4 - XY^2 - Y^3 + X^2 + Y^2 - X$ in de polynoomring $\mathbf{Q}[X, Y]$.

Opgave 2.

(a) Laat $\mathbf{Z}[\sqrt{21}] = \{a + b\sqrt{21} \in \mathbf{R} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Hoeveel ringhomomorfismen $\mathbf{Z}[\sqrt{21}] \to \mathbf{Z}/119\mathbf{Z}$ bestaan er?

(b) Geef een basis voor het $\mathbf{Z}$-moduul

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 \quad : \quad 3x + 6y - 2z \equiv 0 \pmod{12} \right\}.$$

Opgave 3. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2023} \in \mathbf{C}$ zo zijn dat

$$X^{2023} + 6X^{2022} + X^{2021} + X^{2020} + 1 = \prod_{i=1}^{2023} (X - \alpha_i).$$

Bepaal $\sum_{i=1}^{2023} \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_i^2 \alpha_j^2$.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 4. Bekijk de verzameling

$$I = \left\{ \sum_k a_k X^k \in \mathbf{Z}[X] \quad : \quad a_0 \equiv a_1 \equiv 0 \pmod 2 \right\}.$$

(a) Laat zien dat I een ideaal is van $\mathbf{Z}[X]$.

(b) Laat zien dat voor alle monische $f \in I$ geldt dat $\Delta(f)$ deelbaar is door 2 in $\mathbf{Z}$.

(c) Is I een priemideaal?

(d) Is I een hoofdideaal?

(e) Zij $J \supset I$ een maximaal ideaal van $\mathbf{Z}[X]$. Bewijs $\mathbf{Z}[X]/J \cong \mathbf{F}_2$.

[Hint: (b) – (e) zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen.]

Opgave 5. Zij K een lichaam.

(a) Laat zien dat voor ieder niet-nul ideaal $I \subset K[[X]]$ er een geheel getal $n \geq 0$ bestaat waarvoor $I = (X^n)$. Je mag opgave 11.16 gebruiken zonder deze op te lossen.

(b) Bepaal alle isomorfie-klassen van $K[[X]]$-modulen met K-dimensie 3. Geef voor elk van deze modulen M een K-basis en de matrix van de afbeelding $M \to M, m \mapsto Xm$ ten opzichte van zo'n basis.

De waarschijnlijke puntenverdeling is als volgt: Opgaven 1, 2, 4, 5 zijn evenveel punten waard, opgave 3 is half zoveel punten waard als ieder van de andere. Niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.

Veel succes!