Tentamen Analyse 1

Maandag 9 januari 2023, 13:15–16:15 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een eenvoudige rekenmachine mag wel gebruikt worden. Bedenk wel dat steeds exacte antwoorden worden gevraagd.

---

1 De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x^2+5x+2}{x+1}, & x < -1, \\[2ex] -x, & -1 \le x \le 0, \\[2ex] 2\sqrt{x}, & 0 < x \le 1, \\[2ex] 2 + \dfrac{x-1}{x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Is f continu in 0? Beargumenteer!

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 1.

(c) Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f.

(d) Bepaal plaats en grootte van de extreme waarden van f en bepaal of het maxima of minima zijn. Geef ook aan of de maxima en minima globaal of alleen lokaal zijn.

2 Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integralen:

(a) $\displaystyle\int_2^3 (2x+2)\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \frac{6x^3+12x^2+16x+15}{x^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x$.

Z.O.Z.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n(n+2)^3}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

4 Bekijk de functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x} + x \quad \text{voor alle } x \in (0,\infty).$$

(a) Geef het eerstegraads Taylorpolynoom p van f rond 4 in de vorm $p(x) = c_0 + c_1(x-4)$.

(b) Toon aan dat voor alle $x > 4$ geldt dat

$$-\tfrac{1}{64}(x-4)^2 < f(x) - p(x) < 0.$$

5 Bepaal de volgende drie limieten:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2xe^x - \sin(2x) - 2x^2}{\ln(1+x^3)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} \left(x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\arctan(x+1)\sin(x)}{x^2}$.

6 Gegeven is een continue functie $f_0\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Definieer voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ de functie

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{voor alle } x \in [0,1].$$

(a) Toon aan dat er een constante $C \geq 0$ bestaat zo dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en alle $x \in [0,1]$ geldt dat

$$|f_n(x)| \leq \frac{C}{n!} x^n.$$

(b) Toon aan dat voor iedere $x \in [0,1]$ de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absoluut convergent is.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	19 (2+4+5+8)	19 (5+8+6)	14 (4+4+6)	8 (3+5)	13 (4+5+4)	7 (4+3)	80

cijfer = aantal punten/8