Tentamen Analyse 1

Donderdag 26 januari 2023, 13:15–16:15 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **zes** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is niet toegestaan. Een eenvoudige rekenmachine mag wel gebruikt worden. Bedenk wel dat steeds exacte antwoorden worden gevraagd.

---

1 De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{x+1}, & \text{voor } x < -1, \\ 1 - x^2 & \text{voor } -1 \leq x \leq 0, \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{voor } 0 < x \leq \pi, \\ \dfrac{x}{x-\pi} & \text{voor } x > \pi. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f continu is in -1.

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0 en dat $f'(0) = 0$.

(c) Bepaal de eventuele verticale, horizontale en scheve asymptoten van f.

(d) Toon aan dat voor alle $x \in (0, \pi)$ geldt dat $x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

(e) Toon aan dat f strikt dalend is op $[0, \pi)$.

(f) Bepaal alle punten waar f een lokaal minimum of maximum heeft. Geef de waarde van f in die punten en geef per punt duidelijk aan of het een minimum of een maximum is. Geef van elk van de maxima en minima ook aan of het globaal of alleen lokaal is.

2 Bereken de volgende onbepaalde en bepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3+2x^2+2x-8}{x^2+4x+8} + \frac{27x-50}{x^2-4}\right)\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan(x)}\sin(x)}{\cos^3(x)}\,\mathrm{d}x$.

Z.O.Z.

3 Ga van de volgende reeksen na of deze absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n}{e^{2n} + 1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n^4 + \sqrt{n} + 3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

4 De kromme K bestaat uit alle punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die voldoen aan

$$(y+1)^y + 2x^2 y + (x-1)\arctan(x) + x = 5.$$

Gegeven is hier dat voldoende dichtbij het punt $(1,1)$ de kromme K de grafiek is van een differentieerbare functie f die gedefinieerd is op een open interval dat 1 bevat. Geef de vergelijking van de raaklijn aan de kromme K in het punt $(1,1)$ in de vorm $y = rx + b$.

5 Gegeven is een drie keer differentieerbare functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 5$ en $0 \leq f'''(x) \leq 1$ voor alle $x \geq 2$.

(a) Geef het tweedegraads Taylorpolynoom p van f rond $a = 2$ in de vorm $p(x) = c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2$.

(b) Toon aan dat voor alle $x \in (2,\infty)$ geldt dat $0 \leq f(x) - p(x) \leq \frac{1}{6}(x-2)^3$.

(c) Bepaal de limiet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x^2) - \sin(x) + x}{x^2(e^x - 1)}$.

6 Gegeven is een continue functie $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ zo dat de oneigenlijke integraal $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ bestaat en zo dat

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{voor alle } x \in (0,1].$$

(a) Toon aan dat voor alle $a, x \in (0,1]$ met $a < x$ geldt dat

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Toon aan dat $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Puntenverdeling (onder voorbehoud)

Opgave:	1	2	3	4	5	6	Totaal
Punten:	22 (2+4+4+3+2+7)	18 (5+8+5)	18 (4+4+4+6)	6 (6)	10 (2+4+4)	6 (2+4)	80

cijfer = aantal punten/8