Tentamen Topologie

woensdag 4 januari 2023, 9:00-12:00

- Je mag bij het tentamen een tweezijdig, handgeschreven A4 blaadje gebruiken met eigen aantekeningen (definities, stellingen...).
- Verdere (elektronische) bronnen zijn niet toegestaan.
- Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.
- Succes!

(9 pt) **1** Beschouw de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ met de gebruikelijke Euclidische topologie en bepaal of ze gesloten, dan wel compact zijn. Motiveer je antwoord.

(a) De gesloten eenheidsschijf $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ met een eindig aantal punten verwijderd, dus $D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, waarbij $p_1, \ldots, p_n \in D^2$, $n \geq 1$.

(b) De gesloten eenheidsschijf $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ verenigd met een eindig aantal punten, dus $D^2 \cup \{p_1, \ldots, p_n\}$, waarbij $p_1, \ldots, p_n \notin D^2$, $n \geq 1$.

(c) De strip tussen de grafieken van twee continue functies f en g van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, met $f(x) < g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(6 pt) **2** Zij $f : X \to Y$ continu. Neem aan dat X compact is en Y Hausdorff.

(a) Laat zien dat f een gesloten afbeelding is.

(b) Laat zien dat $f^{-1}(C)$ compact is voor elke compacte deelverzameling $C \subseteq Y$ (een afbeelding met deze eigenschap heet een *eigenlijke* afbeelding).

(9 pt) **3** Zij X een topologische ruimte. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(a) Iedere deelruimte $Y \subseteq X$ is normaal.

(b) Voor iedere tweetal deelverzamelingen $A, B \subseteq X$ met $\overline{A} \cap B = \emptyset$ en $A \cap \overline{B} = \emptyset$ bestaan er disjuncte open deelverzamelingen U en V van X zo dat $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.

Hint: om $(a) \Rightarrow (b)$ te bewijzen, beschouw $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$.

(9 pt) **4** We hebben het projectieve vlak $\mathbb{RP}^2$ gedefinieerd als quotiënt $S^2/\mathbb{Z}_2$, waarbij $\mathbb{Z}_2$ werkt op S^2 door $-1 \cdot x = -x$. De afbeelding $p : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ gedefinieerd door $p(x) = [x]$ is een overdekkingsafbeelding (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Kies een basispunt $[x_0] \in \mathbb{RP}^2$ en geef de definitie van de *lifting correspondence*

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{RP}^2, [x_0]) \to p^{-1}([x_0]).$$

(b) Gebruik de lifting correspondence en het feit dat S^2 enkelvouding samenhangend is om de fundamentaalgroep van het projectieve vlak te berekenen.

(9pt) **5** Zij X, X_1 en X_2 wegsamenhangende deelruimten van $\mathbb{R}^2$. Ga na of de volgende beweringen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Als X convex is, dan is $\pi_1(X) \cong \{1\}$. (X heet *convex* als voor ieder tweetal punten $x, y \in X$ het segment tussen x en y geheel binnen X ligt.)

(b) Als $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, dan is $X_1 \cup X_2$ ook wegsamenhangend.

(c) Als $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ en $\pi_1(X_1) \cong \{1\} \cong \pi_1(X_2)$, dan is $\pi_1(X_1 \cup X_2) \cong \{1\}$.

(12 pt) **6** Zij X een topologische ruimte. De *kegel* met basis X is de ruimte

$$C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\}),$$

oftewel $C(X) = (X \times [0,1])/\sim$, waarbij $(x,t) \sim (x',t')$ dan en slechts dan als $(x,t) = (x',t')$ of $(x,t), (x',t') \in X \times \{1\}$.

(a) Laat zien dat $C(X)$ wegsamenhangend is.

(b) Bewijs dat de identiteitsafbeelding van $C(X)$ homotoop is met de constante afbeelding $f([(x,s)]) = [(x,1)]$ (met andere woorden, $C(X)$ is samentrekbaar).

Hint: als $p : X \to Y$ een quotiëntafbeelding is, dan is $(p, \mathrm{id}) : X \times I \to Y \times I$ ook een quotiëntafbeelding (dit mag je zonder bewijs gebruiken).

Normering: het cijfer is gelijk aan $1 + \frac{\#\text{punten}}{6}$.