Hertentamen Topologie

woensdag 25 januari 2023, 9:00-12:00

- Je mag bij het tentamen een tweezijdig, handgeschreven A4 blaadje gebruiken met eigen aantekeningen (definities, stellingen...). Verdere (elektronische) bronnen zijn niet toegestaan.
- Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.
- Succes!

(9 pt) **1** Geef (*zonder bewijs*) het inwendige, de afsluiting en de samenhangscomponenten van de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^2$.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0 \text{ en } y \neq 0\}$;

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x, y \in \mathbb{Q}\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$;

(9 pt) **2** Zij $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ met de Euclidische topologie en $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ de eenheidssfeer met de deelruimte topologie.

(a) Leg uit waarom S^2 en X niet homeomorf zijn.

(b) Zij $\mathbb{R}_{>0}$ de verzameling van alle positieve reële getallen. We definieren een equivalentierelatie $\sim$ op X als volgt:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{z.d.} \quad y = \lambda x.$$

Bewijs dat de quotiëntruimte $Y = X/\sim$ homeomorf is met S^2.

(12 pt) **3** Zij X en Y topologische ruimten. We geven $X \times Y$ de producttopologie en schrijven $\pi_X : X \times Y \to X$ en $\pi_Y : X \times Y \to Y$ voor de projectie-afbeeldingen.

(a) Zij $C \subseteq X \times Y$ een gesloten deelverzameling een neem aan dat er compacte deelverzamelingen $K_X \subseteq X$ en $K_Y \subseteq Y$ bestaan zo dat $\pi_X(C) \subseteq K_X$ en $\pi_Y(C) \subseteq K_Y$. Bewijs dat C compact is.

(b) Neem aan dat X en Y allebei Hausdorff zijn en zij $A \subseteq X \times Y$ een deelverzameling met de eigenschap dat $\pi_X(A)$ en $\pi_Y(A)$ allebei compact zijn. Bewijs dat $\overline{A}$ compact is.

(c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat A zelf niet compact hoeft te zijn.

z.o.z

(8 pt) **4** Een topologische ruimte X voldoet aan het *eerste aftelbaarheidsaxioma (e.a.a.)* als elk punt $x \in X$ een aftelbare omgevingsbasis heeft, d.w.z., voor alle $x \in X$ bestaat er een aftelbare collectie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ open omgevingen van x zodanig dat voor elke open omgeving V van x een $n \in \mathbb{N}$ bestaat met $x \in U_n \subseteq V$.

Ga na of de volgende beweringen juist of onjuist zijn. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Elke metriseerbare ruimte voldoet aan het e.a.a.

(b) Als een topologische ruimte X aan het e.a.a. voldoet, dan is X metriseerbaar.

(9 pt) **5** Zij X een topologische ruimte en f, g, h paden in X.

(a) Neem aan dat $f(0) = h(0)$, $f(1) = g(0)$ en $g(1) = h(1)$. Neem bovendien aan dat $[f] * [g] = [h]$. Bewijs dat $[f] = [h] * [\overline{g}]$, waarbij $\overline{g}$ het inverse pad is. *Je mag eigenschappen van $*$ zonder bewijs gebruiken, maar vermeld duidelijk welke eigenschappen je gebruikt.*

Laat $A \subseteq X$ een wegsamenhangende deelruimte zijn. Zij $a \in A$ en $i : A \to X$ de inclusie-afbeelding. Neem aan dat $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ surjectief is. Zij $f : [0, 1] \to X$ een pad met $f(0) = a$ en $f(1) \in A$.

(b) Bewijs dat f padhomotoop is met een pad $g : [0, 1] \to X$ zodanig dat $g(s) \in A$ voor alle $s \in [0, 1]$.

(10 pt) **6** Definieer $f : S^1 \times [0, 1] \to S^1 \times [0, 1]$ door $f(\theta, s) = (\theta + 2\pi s, s)$. Merk op dat de beperking van f tot de randcomponenten $S^1 \times \{0\}$ en $S^1 \times \{1\}$ gelijk is aan de identiteit.

(a) Bewijs dat er een homotopie F bestaat tussen f en de identiteitsafbeelding van $S^1 \times [0, 1]$ zo dat $F((\theta, 0), t) = (\theta, 0)$ voor alle $\theta \in S^1$ en alle $t \in [0, 1]$.

(b) Laat zien dat er geen homotopie bestaat tussen f en de identiteitsafbeelding van $S^1 \times [0, 1]$ zo dat $F((\theta, 0), t) = (\theta, 0)$ en $F((\theta, 1), t) = (\theta, 1)$ voor alle $\theta \in S^1$ en voor alle $t \in [0, 1]$. *Hint: beschouw het pad $\gamma(s) = (\theta_0, s)$ voor een vaste $\theta_0 \in S^1$ en de projectie op S^1 van $F(\gamma(s), t)$.*

Normering: het cijfer is gelijk aan $\min\left\{1 + \frac{\#\text{punten}}{6}, 10\right\}$.