Tentamen Wiskundige Structuren 2022-23
Donderdag 12 januari 2023, 9:00-12:00

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Je mag geen dictaat of aantekeningen gebruiken, Motiveer steeds je antwoorden en noem de stellingen die je gebruikt. Succes!

Opgave 1. [15pt]

Zij A en B niet-lege verzamelingen en $f : A \to B$ een functie.

(a) Bewijs dat f injectief is dan en slechts dan als $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ voor alle $X, Y \subseteq A$.

(b) Bewijs dat f surjectief is dan en slechts dan als $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$ voor alle $X \subseteq A$.

Opgave 2. [15pt]

Definieer de relatie $\sim$ op $\mathbb{Z}$ als volgt: $x \sim y$ dan en slechts dan als er een $k \in \mathbb{Z}$ bestaat met $3x + 2y = 5k$.

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $\mathbb{Z}$.

(b) Geef de equivalentieklasse van 0.

(c) Bewijs dat de afbeelding $q : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gedefinieerd door $q(x) =$ "de rest bij deling van x door 5" een quotiëntafbeelding is voor $\sim$.

Opgave 3. [15pt]

Zij A een niet-lege, begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$.

(a) Bewijs dat $\sup A - \inf A$ een bovengrens is voor de verzameling

$$\{|x - y| \,:\, x, y \in A\}.$$

(b) Definieer de *diameter* van A als volgt:

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{|x - y| \,:\, x, y \in A\}.$$

Bewijs dat $\mathrm{diam}(A) = \sup A - \inf A$.

z.o.z

Opgave 4. [15pt]

Beschouw de rij in $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$a_0 = 1 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat $a_n \geq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $a_{n+1} - a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Bewijs dat $a_n < 3$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
(c) Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert en bereken zijn limiet.

Opgave 5. [15 pt]

Ga na of rijen met de gegeven eigenschappen bestaan. Geef een voorbeeld (met bewijs) of laat zien dat dergelijke rijen niet bestaan.

(a) Convergente rijen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zodanig dat $a_n < b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
(b) Een monotoon stijgende rij die divergent is en een convergente deelrij heeft.
(c) Een onbegrensde rij met een convergente deelrij.

Opgave 6. [15pt]

Zij $D \subseteq \mathbb{R}$ en $f, g : D \to \mathbb{R}$ uniform continue functies op D.

(a) Bewijs dat de som $f + g$ ook uniform continu is op D.
(b) Laat zien dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x$ uniform continu is, maar het product van f met zichzelf, namelijk $g(x) = f(x) \cdot f(x) = x^2$ niet uniform continu is.
(c) Neem aan dat f en g begrensd zijn op D: bewijs dat $f \cdot g$ ook uniform continu is op D.

Normering: elke opgave is 15 punten waard en het cijfer is gelijk aan

$$1 + \frac{\#\text{punten}}{10}.$$