Hertentamen Wiskundige Structuren 2022-23
Maandag 30 januari 2023, 13:15-16:15

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Je mag geen dictaat of aantekeningen gebruiken. Motiveer steeds je antwoorden. Succes!

Opgave 1. [5+6+4 pt]

Gegeven zijn verzamelingen A en B en een functie $f : A \to B$. Bewijs de volgende beweringen:

(a) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ voor alle $U, V \subseteq B$;

(b) $f[f^{-1}(V)] \subseteq V$ voor alle $V \subseteq B$, met gelijkheid dan en slechts dan als f surjectief is;

(c) Vind verzamelingen A en B, een functie $f : A \to B$ en een deelverzameling $V \subseteq B$ waarvoor geldt: $f[f^{-1}(V)] \neq V$.

Opgave 2. [8+4 pt]

We beschouwen in deze opgave de rij gedefineerd door

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \quad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

(a) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(b) Vind de limiet van $(a_n)_{n \geq 1}$. Je mag de volgende ongelijkheid zonder bewijs gebruiken:

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n-1} \quad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Opgave 3. [6+2+6 pt]

Zij $\mathcal{X}$ de verzameling van alle *eindige* deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. We definieren een relatie $\sim$ op $\mathcal{X}$ als volgt:

$$A \sim B \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \exists \text{ een bijectie } f : A \to B.$$

(a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $\mathcal{X}$.

(b) Vind de equivalentieklasse van $A = \{1, 2\}$.

(c) Bewijs dat er een bijectie bestaat tussen de varzameling van equivalentieklassen $\mathcal{X}/\sim$ en $\mathbb{N}$.

z.o.z

Opgave 4. [3+7+3 pt]

Beschouw de verzameling

$$A = \left\{ \frac{3n^2}{1+2n^2} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

(a) Bewijs dat A naar boven en naar beneden begrensd is.

(b) Bepaal het infimum en het supremum van A. *Hint*: merk op dat

$$\frac{3n^2}{1+2n^2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{1+2n^2}\right).$$

(c) Heeft A een minimum? Heeft A een maximum?

Opgave 5. [6+6 pt]

(a) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij met $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ en $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bewijs dat $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is, met $\lim_{n\to\infty} b_k = L$.

(b) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij en neem aan dat er een $P \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bestaat met $a_{n+P} = a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is dan en slechts dan als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een constante rij is.

Opgave 6. [5+5+5 pt]

Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie. Bewijs de volgende beweringen.

(a) Neem aan dat f uniform continu is en dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is in $[a,b]$. Bewijs dat $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ook een Cauchy-rij is.

(b) Als de verzameling

$$S = \left\{ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \ : \ x,y \in [a,b] \text{ en } x \neq y \right\}$$

begrensd is, dan is f uniform continu.

(c) Als er een $c \in (a,b)$ bestaat zodanig dat f uniform continu is op $[a,c]$ en $[c,b]$, dan is f uniform continu op $[a,b]$.

Normering: het cijfer is gelijk aan

$$1 + \frac{\#\text{punten}}{9}.$$