Tentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 9 januari 2023, 9:00-12:00

- Schrijf op ieder vel je naam, studentnummer en studierichting. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
- Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
- Qua electronische hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.
- De bijlage met Laplace transformaties bevindt zich op de laatste pagina.

Succes!

1.) Beschouw de inhomogene tweede orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt} - (\alpha+1)\frac{dx}{dt} + \alpha x = f(t), \tag{1}$$

met $\alpha > 1$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoende glad.

[8p] (a) Bekijk eerst $f(t) \equiv 0$. Bepaal de algemene oplossing $x_{\text{hom},\alpha}(t) = x_{\text{hom},\alpha}(t; A, B)$, waarbij $A, B \in \mathbb{R}$ de vrij te kiezen parameters zijn (en $\alpha > 1$). Druk A en B uit in termen van de beginvoorwaarde $x_{\text{hom},\alpha}(0) = x_0$ en $x'_{\text{hom},\alpha}(0) = x'_0$.

[11p] (b) Neem nu $\alpha = 2$ en $f(t) = e^{\beta t}$ met $\beta \in \mathbb{R}$. Bepaal hiervan de algemene oplossing van (1), zeg $x_\beta(t) = x_\beta(t; C, D)$, waarbij nu $C, D \in \mathbb{R}$ de vrije parameters zijn.

[5p] (c) Beschouw wederom het inhomogene probleem met $\alpha = 2$ en $f(t) = e^{\beta t}$. Voor welke waarden van $\beta \in \mathbb{R}$ heeft differentiaalvergelijking (1) een unieke oplossing $x^*_\beta(t)$ waarvoor geldt $\lim_{t\to\infty} x^*_\beta(t) = 0$?

2.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= \quad 4x + y + 3xy - xF(x^2+y^2), \\ \dot{y} &= -x + 4y + 3y^2 - yF(x^2+y^2), \end{cases} \tag{2}$$

waarbij $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, d.w.z. $F(R)$ is een continu differentieerbare functie van $R \geq 0$. Neem ook aan $F(0) = 0$, waardoor $(0,0)$ het enige kritieke punt is.

[6p] (a) Laat zien dat de oorsprong altijd instabiel is, onafhankelijk van de keuze van de functie F (met $F(0) = 0$).

[5p] (b) Schrijf het stelsel in poolcoordinaten (r, θ).

[10p] (c) Neem vervolgens $F(R) = R = x^2 + y^2 = r^2$. Bewijs dat stelsel (2) minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing heeft.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Beschouw het volgende inhomogene tweede orde probleem

$$ty'' - (t+1)y' + 2y = 0, \tag{3}$$

voor $t > 0$. Ondanks het feit dat we niet-constante coefficienten hebben, zullen we de algemene oplossing gaan bepalen met behulp van Laplace transformaties.

[3p] (a) Is $t = 0$ een regulier singulier punt? Licht je antwoord toe.

[6p] (b) Veronderstel $y(0) = 0$. Laat zien dat in dit geval de Laplace getransformeerde functie $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ voldoet aan de eerste orde vergelijking

$$Y'(s) + \frac{3}{s}Y(s) = 0. \tag{4}$$

[6p] (c) Bepaal de algemene oplossing van differentiaalvergelijking (4). Concludeer vervolgens dat $y_1(t) = t^2$ een oplossing is van (3).

[6p] (d) Bepaal een tweede oplossing $y_2(t)$ van vergelijking (3) die lineair onafhankelijk is van $y_1(t)$ en geef de algemene oplossing van vergelijking (3).
Hint. Gebruik de "variatie van constante / orde reductie"-methode. Integralen in de einduitdrukking van $y_2(t)$ mogen blijven staan.

[4p] (e) Toon aan dat er oneindig veel oplossingen voor vergelijking (3) met beginvoorwaarde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ zijn. We hebben dus geen uniciteit! Beargumenteer waarom dit resultaat geen grote verassing is.

4.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (x-2)(y-1+x), \\ \dot{y} & = & -4xy. \end{array} \right. \tag{5}$$

Definieer $(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T$ als de oplossing van (5) met beginvoorwaarde $(x_0,y_0)^T \in \mathbb{R}^2$. Oftewel, er geldt $(x(0;(x_0,y_0)), y(0;(x_0,y_0)))^T = (x_0,y_0)^T$.

[8p] (a) Bepaal alle vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt. Bepaal dan hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit en het karakter van de vaste punten voor origineel stelsel (5)?

[8p] (b) Geef voor alle vaste punten een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren.

[6p] (c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x,y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x,y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x},\dot{y})$ aan op de nullclines.

[8p] (d) Bekijk nu een willekeurige oplossing met beginvoorwaarde $(x_0,y_0)^T$, waarbij

$$0 < x_0 < 2 \quad \text{en} \quad 0 < y_0 < 1.$$

Bewijs dan dat $\lim_{t\to\infty}(x(t;(x_0,y_0)), y(t;(x_0,y_0)))^T = (1,0)^T$ geldt.

Einde!

Bijlage: Laplace transformatie tabel

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)](t)$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
$H_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
$H_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$

waarbij

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$