Tentamen Lineaire Algebra 2
20 januari 2023, 9:00 – 12:00

Je mag het dictaat en je aantekeningen gebruiken, ook van huiswerk- en werkcollegeopgaven. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat of huiswerk verwijzen. Je mag **geen** rekenmachine gebruiken. **Bewijs al je antwoorden! Voor correcte antwoorden zonder bewijs of uitleg hoe je er aan komt worden geen punten gegeven.**

Opgave 1. (4+3=7 punten)
Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N die voldoen aan

$$N + D = B \qquad \text{en} \qquad DN = ND.$$

(b) Bepaal B^{2023}.

Opgave 2. (1+2+5+2=10 punten)
Beschouw de reële matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de vector $(2, 2, -1)$ een eigenvector van A is.
(b) Is A positief definiet?
(c) Bepaal een orthogonale matrix Q zodanig dat $Q^\top AQ$ diagonaal is.
(d) Wat is de signatuur van A?

Opgave 3. (7 punten)
Zij $V \subset \mathbf{R}^4$ de ruimte opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (-2, 1, 0, 0), \\ v_2 &= (1, 0, 1, 0), \\ v_3 &= (-3, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Geef een orthonormale basis voor V.

Zie achterkant

Opgave 4. (1+2+3+5=11 punten)
Zij $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbf{R})$ de vectorruimte van reële 2×2 matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zij $f\colon V \to V$ de afbeelding gegeven door $f(M) = A^\top M A$.

(a) Laat zien dat er geldt

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+c & a+b+c+d \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal een basis voor de kern van $f - \mathrm{id}_V$.

(c) Bepaal de dimensie van de kern van $(f - \mathrm{id}_V)^2$ en $(f - \mathrm{id}_V)^3$.

(d) Bepaal een basis B voor V en een matrix J in Jordan normaalvorm, zodanig dat voor de matrix $[f]_B^B$ geassocieerd aan f ten opzichte van B geldt $[f]_B^B = J$.

Opgave 5. (2+3+5=10 punten)
Zij M een reële positief-definiete symmetrische $n \times n$ matrix, en zij $b\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ het inproduct gegeven door

$$b(x, y) = y^\top M x.$$

Zij A een $n \times n$ matrix, en $f = f_A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de afbeelding gegeven door $f(x) = Ax$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n$.

(a) Bewijs dat M inverteerbaar is.

(b) Laat zien dat f een isometrie is ten opzichte van het inproduct b dan en slechts dan als er geldt $A^\top M A = M$.

(c) Zij f^* de geadjungeerde [Engels: adjoint] van f ten opzichte van het inproduct b. Zij A' de matrix waarvoor geldt $f^* = f_{A'}$. Bewijs dat er geldt $A' = (MAM^{-1})^\top$.