Hertentamen Gewone Differentiaalvergelijkingen

Maandag 27 maart 2023, 9:00-12:00

- Schrijf op ieder vel je naam, studentnummer en studierichting. Voorzie alle vellen van een nummer samen met het totaal aantal vellen.
- Geef niet alleen de eindantwoorden, maar leg ook elke stap uit die je maakt. Gebruik dus ook niet zomaar formules uit het boek zonder afleiding.
- Qua electronische hulpmiddelen is alleen een simpele rekenmachine toegestaan.
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven en is verspreid over **twee** pagina's.

Succes!

1.) Bekijk de inhomogene tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' + 5x' + 6x = g(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

met $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu.

(a) Bepaal de homogene oplossing van (1), dus voor $g(t) \equiv 0$.

(b) Neem nu $g(t) = \alpha + e^{-t}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal de algemene oplossing van (1).

(c) Bepaal nu de algemene oplossing van (1) voor willekeurige functies $g(t)$.

(d) Neem wederom $g(t) = \alpha + e^{-t}$, alleen laat nu $\alpha > 0$ zijn. Definieer $x_\gamma(t)$ als *een* oplossing van vergelijking (1) met $x_\gamma(0) = \gamma$. Beredeneer dat, als $x_\gamma(0) = \gamma < 0$ geldt, er een $t_* > 0$ moet zijn zodanig dat $x_\gamma(t_*) = 0$.

2.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &=& -4x - y - 3xy + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &=& x - 4y + y(x^2 + y^2 - 3y). \end{cases} \tag{2}$$

Gegeven is dat $(0, 0)$ het enige kritieke punt is.

(a) Bepaal het gelineariseerde stelsel rond de oorsprong. Bepaal vervolgens hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van de oorsprong voor het gelineariseerde systeem.

(b) Schrijf het stelsel in poolcoöordinaten r en θ.

(c) Bewijs dat er minstens 1 (niet-triviale) periodieke oplossing bestaat. Geef, ter illustratie, ook een schets van het bijbehorende faseportret in het (x, y)-vlak.

Vervolg op volgende pagina!

3.) Beschouw de 1-dimensionale niet-lineaire vergelijking

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \tag{3}$$

A. Neem $f(y) = y^\rho$, waarbij $\rho > 1$. Laat $y_1(t)$ de unieke oplossing van (3) zijn die voldoet aan de beginvoorwaarde $y_1(1) = 1$.

(i) Bepaal de oplossing $y_1(t)$.

(ii) De oplossing $y_1(t)$ bestaat alleen voor $t \in (-\infty, T(\rho))$, met $T(\rho) < 1$, aangezien $\rho > 1$. Er is "finite time blowup". Bepaal de (maximale) waarde van $T(\rho)$.

B. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu een continue differentieerbare functie met $\sup_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)| \leq L$. Dan is de functie f Lipschitz continu. Dat wil zeggen, er geldt

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

voor alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dit hoef je niet aan te tonen.

(i) Bewijs dat voor iedere $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ er een unieke oplossing $y(t)$, met $y(t_0) = y_0$, bestaat op het interval $[t_0, t_0 + \alpha]$, waarbij $\alpha > \frac{1}{L}$.
Hint. Laat onder anderen zien dat $|f(y)| \leq |f(y_0)| + L|y - y_0|$.

(ii) Toon aan dat er een unieke functie $y(t; y_0)$, voor alle $t \in \mathbb{R}$, bestaat die voldoet aan differentiaalvergelijking (3) met $y(0; y_0) = y_0$, waarbij $y_0 \in \mathbb{R}$ willekeurig.

4.) Beschouw het 2-dimensionale stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(y^2 - x - 1), \\ \dot{y} &= y(x - 1). \end{cases} \tag{4}$$

Definieer $(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))^T$ als de oplossing van (4) met beginvoorwaarde $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$. Oftewel, er geldt $(x(0; (x_0, y_0)), y(0; (x_0, y_0)))^T = (x_0, y_0)^T$.

(a) Bepaal alle vaste/equilibrium punten. Geef het gelineariseerde stelsel rond elk vast punt. Bepaal dan hieruit het karakter (zadel, centrum, focus of knoop) en de stabiliteit van dat vaste punt voor het gelineariseerde systeem. Kunnen we hieruit iets concluderen over de stabiliteit en het karakter van de vaste punten voor origineel stelsel (4)?

(b) Geef voor alle vaste punten een aparte schets van het gelineariseerde systeem rond dat punt, gebruik makende van de bijbehorende eigenvectoren.

(c) Bepaal de nullclines, schets deze in het (x, y)-vlak en geef het teken van $\dot{x}$ en $\dot{y}$ in de gebieden waarin het (x, y)-vlak door de nullclines wordt onderverdeeld. Geef ook (met pijltjes) de richting van $(\dot{x}, \dot{y})$ aan op de nullclines.

(d) Bekijk nu een willekeurige oplossing met beginvoorwaarde $(x_0, y_0)^T$, waarbij

$$y_0^2 - 1 < x_0 < 1 \quad \text{en} \quad y_0 > 0.$$

Bewijs dan dat $\lim_{t\to\infty}(x(t; (x_0, y_0)), y(t; (x_0, y_0)))^T = (0, 0)^T$ geldt.

Einde!