Tentamen Lineaire Algebra 1
dinsdag 20 december 2022, 13:15–16:15

Alle opgaven zijn evenveel waard. Je mag het dictaat en je eigen aantekeningen gebruiken, maar je mag opgaven uit het dictaat **niet** zonder bewijs gebruiken. Je mag een rekenmachine gebruiken, maar geen andere elektronische hulpmiddelen. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

1. Zij $a = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zij $\pi_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie op $a^\perp$. Vind $\pi_{a^\perp}((1, 0, 0))$.

(b) Vind vectoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ die een basis voor $a^\perp$ vormen.

(c) Vind de matrix van de afbeelding $\pi_{a^\perp}$ (i) ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$; (ii) ten opzichte van de basis $\{a, b, c\}$.

2. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vind een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm die rij-equivalent is met A.

(b) Vind een basis voor de kern van A.

(c) Beschrijf alle oplossingen van $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Wat is $\det(A)$?

3. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -12 & -6 & 12 \\ -8 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en voor iedere eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(b) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

4. Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding. Stel dat $f^2 = 0$ maar $f \neq 0$.

(a) Laat zien dat $\operatorname{im}(f) \subset \ker(f)$.

(b) Laat zien dat $\operatorname{im}(f)$ en $\ker(f)$ allebei dimensie 1 hebben, en concludeer dat ze gelijk zijn.

(c) Bewijs: er is een basis B van $\mathbb{R}^2$ zodanig dat

$$[f]^B_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[Hint: neem $v \notin \ker(f)$ en $B = \{f(v), v\}$.]

5. Zij Q een inverteerbare 2×2 matrix.

(a) Definieer $\phi_Q\colon \operatorname{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) \to \operatorname{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ door $\phi(A) = QAQ^{-1}$. Laat zien dat ϕ_Q een lineaire afbeelding is.

(b) Laat zien dat 1 een eigenwaarde van ϕ_Q is.

(c) Geef een voorbeeld van Q waarvoor $E_1(\phi_Q)$ gelijk is aan $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, en een voorbeeld van Q waarvoor $E_1(\phi_Q)$ *niet* gelijk is aan $\operatorname{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$.

(d) Geef een voorbeeld van Q waarvoor ϕ_Q een eigenwaarde λ heeft met $\lambda \neq 1$.

6. Waar of niet waar? Geef een kort bewijs als de uitspraak waar is. Als het niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld waar dat uit blijkt. Vergeet niet ook je conclusie duidelijk te melden: **waar** of **niet waar**?

(a) Als 0 een eigenwaarde van een $n \times n$ matrix A is, dan is A niet inverteerbaar.

(b) Als twee 2×2 matrices dezelfde determinant en hetzelfde spoor hebben, dan zijn ze gelijksoortig.

(c) De afbeelding $\phi\colon \operatorname{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]$, waarbij $\phi(A)$ gelijk is aan het karakteristieke polynoom van A, is lineair.