Hertentamen Lineaire Algebra 1
maandag 16 januari 2023, 9:00–12:00

Alle opgaven zijn evenveel waard. Je mag het dictaat en je eigen aantekeningen gebruiken, maar je mag opgaven uit het dictaat **niet** zonder bewijs gebruiken. Je mag een rekenmachine gebruiken, maar geen andere elektronische hulpmiddelen. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

1. Zij $a = (-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zij $\pi_{a^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie op $a^\perp$. Vind $\pi_{a^\perp}((1, 0, 1))$.

(b) Vind vectoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ die een basis voor $a^\perp$ vormen.

(c) Bewijs: $E_1(\pi_{a^\perp}) = a^\perp$.

(d) Wat zijn de eigenwaarden van $\pi_{a^\perp}$?

2. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vind een matrix in gereduceerde rij-echelonvorm die rij-equivalent is met A en concludeer hieruit dat de kern van A triviaal is.

(b) Beschrijf alle oplossingen van $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Wat is $\det(A)$? *[Hint: kijk naar het effect van de rijoperaties op de determinant.]*

3. Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan $(t-3)^3$.

(b) Bepaal de eigenwaarde(n) van A en voor iedere eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(c) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer je antwoord.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

4. Een $n \times n$ *permutatiematrix* is een $n \times n$ matrix waarin iedere rij precies één 1 bevat en $n-1$ nullen, en ook iedere kolom precies één 1 bevat en $n-1$ nullen. Bijvoorbeeld,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zijn 4×4 permutatiematrices.

(a) Zij P een $n \times n$ permutatiematrix en M een $n \times m$ matrix. Laat zien dat de matrix PM dezelfde rijen als M heeft, maar dan op een andere volgorde.

(b) Laat zien dat het product van twee $n \times n$ permutatiematrices weer een permutatiematrix is.

(c) Geef een voorbeeld (met bewijs) van een permutatiematrix die niet diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.

5. Definieer de afbeelding $\phi\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ door $(\phi(x))_n = x_{2n}$ voor alle $n \geq 1$. Dat wil zeggen, we hebben

$$\phi((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_4, x_6, \dots).$$

(a) Laat zien dat ϕ een lineaire afbeelding is.

(b) Geef twee lineair onafhankelijke elementen van $\ker(\phi)$.

(c) Laat zien dat 1 een eigenwaarde van ϕ is, en geef twee lineair onafhankelijke elementen van $E_1(\phi)$.

(d) Laat zien dat iedere $\lambda \in \mathbb{R}$ een eigenwaarde is van ϕ.

6. Waar of niet waar? Geef een kort bewijs als de uitspraak waar is. Als het niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld waar dat uit blijkt. Vergeet niet ook je conclusie duidelijk te melden: **waar** of **niet waar**?

(a) Een spiegeling $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heeft altijd determinant -1.

(b) Als A een $n \times n$ matrix is zodanig dat $A^2 - I_n = 0$, dan geldt of $A = I_n$ of $A = -I_n$.

(c) Twee matrices met hetzelfde karakteristieke polynoom zijn gelijksoortig.