Tentamen Inleiding Kansrekening

30 juni 2023, 09.00–12.00 uur

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek, aantekeningen en rekenmachine *niet* toegestaan. Wel is het toegestaan om een persoonlijke lijst van belangrijke notaties, definities en stellingen te consulteren.

Er zijn 7 vragen, waarvan sommige bestaan uit onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vet gedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op *elk* blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is *niet* voldoende. Elke berekening dient van een *toelichting* te worden voorzien. Het is niet nodig om formele bewijzen te geven.

---

(1) [**R**] A en B zijn gebeurtenissen met kans $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ en $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

(a) [**8**] Laat zien dat $\frac{1}{12} \le \mathbb{P}(A \cap B) \le \frac{1}{3}$.

(b) [**7**] Geef voorbeelden waarvoor de grenzen bereikt worden.

(2) [**R**] Voor welke waarden van C zijn de volgende functies kansdichtheidsfuncties?

(a) [**8**] $f(x) = C/\sqrt{x(1-x)}$, $x \in (0,1)$.

(b) [**7**] $f(x) = C \exp[-x - \exp(-x)]$, $x \in \mathbb{R}$.

Hint: Gebruik transformatie van variabelen ($x = \sin^2\theta$, respektievelijk, $x = -\log y$).

(3) [**R**][**10**] Zij X een stochast met een continue cumulatieve kansverdelingsfunctie F_X. Wat is de kansverdelingsfunctie van de stochast $Y = F_X(X)$.

(4) [**T**][**10**] Vanaf 12 uur komen bussen elke 10 minuten aan bij een halte. Je arriveert bij de halte T minuten na 12 uur, waarbij T een continue stochast is

met de volgende cumulatieve kansverdelingsfunctie:

$$F_T(x) = \mathbb{P}(T \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{60}, & 0 \le x \le 60, \\ 1, & x > 60. \end{cases}$$

Wat is de kans dat je minder dan 5 minuten op een bus hoeft te wachten?

(5) **[I]** Zij $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een i.i.d. rijtje stochasten, elk standaard normaal verdeeld, en zij N een $\mathbb{N}$-waardige discrete stochast met kansmassafunctie $k \mapsto p_N(k)$.

 (a) **[10]** Druk de momentgenererende functie $M_{S_N}(t)$ van de som $S_N = \sum_{i=1}^N W_i$ uit in termen van de kansgenererende functie $s \mapsto G_N(s)$ van N.

 (b) **[10]** Stel dat N Binomiaal verdeeld is met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{2}$. Bereken $\mathbb{E}(S_N)$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_N)$. *Hint:* Gebruik de formule in onderdeel (a). Indien de afleiding daarvan niet gelukt is, geef dan een direkte berekening.

(6) **[R][15]** X, Y en Z zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op $[0, 1]$. Bereken de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van de stochasten $U = XY$ en $V = Z^2$.

(7) **[I]** X is standaard normaal verdeeld, d.w.z. $f_X(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}x^2]$, $x \in \mathbb{R}$.

 (a) **[7]** Laat zien dat voor elke $c > 0$ de stochast

$$Y = \begin{cases} X, & |X| < c, \\ -X, & |X| \ge c, \end{cases}$$

 opnieuw standaard normaal verdeeld is.

 (b) **[8]** Bereken de covariantie van X en Y in termen van één enkele integraal waarin f_X voorkomt.

SOLUTIONS

(1) (a) De gevraagde ongelijkheden volgen uit de gelijkheid (zie Figuur 1.1 van het boek)

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B),$$

in combinatie met de triviale ongelijkheden $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$.

(b) De grenzen corresponderen met de gevallen $B \subset A$, respektievelijk, $A \cup B = \Omega$ (= de hele toestandsruimte). De waarden van $\mathbb{P}(A)$ en $\mathbb{P}(B)$ laten beide mogelijkheden toe.

(2) (a) Transformeer van x naar θ via $x = \sin^2\theta$. Omdat $\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ en $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, vinden we

$$1 = \int_0^1 \frac{C dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2C\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} 2C d\theta = \pi C.$$

Derhalve is $C = 1/\pi$. Merk op dat we hier te maken hebben met de BETA-verdeling met parameters $s = t = \frac{1}{2}$ (zie p. 69 van het boek). De waarde van C die bij deze kansverdeling hoort is gelijk aan $\Gamma(1)/\Gamma(\frac{1}{2})^2 = 1/\pi$.

(b) Transformeer van x naar $y = e^{-x}$. Omdat $\frac{dy}{dx} = -e^{-x} = -y$, geldt

$$1 = \int_{\mathbb{R}} dx\, C\, e^{-x-e^{-x}} = \int_{\infty}^{0} \frac{dy}{(-y)}\, C\, y\, e^{-y} = C \int_0^{\infty} dy\, e^{-y} = C.$$

(3) Zij $Y = F_X(X)$. Dan $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq u(y)) = F_X(u(y))$ met

$$u(y) = \sup\{u \in \mathbb{R} \colon\ F_X(u) \leq y\}.$$

Als F_X strikt stijgend op $\mathbb{R}$ is, dan is u de inverse functie horend bij de functie F_X, en geldt dat $F_X(u(y)) = y$ voor alle $y \in (0,1)$. We vinden dan dus dat $F_Y(y) = y$, m.a.w. de stochast Y is uniform verdeeld op $(0,1)$. Als F_X niet strikt stijgend op $\mathbb{R}$ is, dan geldt hetzelfde omdat F_X rechtscontinu is. (Dit is met behulp van approximatie eenvoudig af te leiden.) Merk op dat het eindresultaat niet van de keuze van F_X afhangt.

(4) De tijd T is uniform verdeeld over het interval $[0, 60]$ (zie Figuur 5.2 van het boek). Bussen arriveren op de tijdstippen $10j$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Je wacht minder dan 5 minuten dan en slechts dan als $T \in \cup_{j=1}^{6}(10j - 5, 10j]$. Derhalve is de gevraagde kans gelijk aan $\frac{1}{60}\sum_{j=1}^{6} 5 = \frac{1}{2}$.

(5) (a) Schrijf

$$\begin{aligned}
M_{S_N}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \mathbb{E}\big(e^{tS_N} \mid N = k\big) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \mathbb{E}(e^{tS_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, \big[\mathbb{E}(e^{tW_1})\big]^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_N(k)\, [e^{t^2/2}]^k = G_N(e^{t^2/2}).
\end{aligned}$$

(b) Wanneer N Binomiaal verdeeld is met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{2}$, dan geldt $G_N(s) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s)^{10}$. Derhalve volgt dat

$$M_{S_N}(t) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^{10}.$$

Twee keer differentiëren naar t geeft

$$\begin{aligned}
M'_{S_N}(t) &= 10(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^9\, \tfrac{1}{2}te^{t^2/2}, \\
M''_{S_N}(t) &= 90(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^8\, (\tfrac{1}{2}te^{t^2/2})^2 + 10(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/2})^9\, [\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2}t)^2]\, e^{t^2/2}.
\end{aligned}$$

Hieruit leiden we af

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N) &= M'_{S_N}(0) = 0, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_N) &= M''_{S_N}(0) + M'_{S_N}(0) = 5.
\end{aligned}$$

Dit antwoord kan ook worden afgeleid uit de observaties

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} W_i\right) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{E}(W_1) = 5 \times 0 = 0, \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_N) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^{N} W_i\right) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(W_1) = 5 \times 1 = 5.
\end{aligned}$$

(6) Omdat X, Y, Z onafhankelijk zijn, geldt hetzelfde voor $U = XY, V = Z^2$. I.h.b. geldt dus dat $f_{U,V}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$, $u, v \in \mathbb{R}$ (zie Stelling 6.31 van het boek). We berekenen, gebruikmakend van het feit dat $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ met $f_X(x) = 1$, $x \in [0, 1]$, en $f_Y(y) = 1$, $y \in [0, 1]$, en 0 elders,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(XY \leq u) &= \int_0^1 dx \int_0^{\min\{u/x,1\}} dy \\
&= \int_0^u dx + \int_u^1 dx\, \tfrac{u}{x} = u + u \log(\tfrac{1}{u}), \qquad u \in (0, 1],
\end{aligned}$$

en 0 elders. Differentieren naar u geeft $f_U(u) = \log(\frac{1}{u})$, $u \in (0,1]$, en 0 elders. Evenzo berekenen we

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(Z^2 \leq v) = \mathbb{P}(Z \leq \sqrt{v}\,) = \sqrt{v}, \qquad v \in (0,1],$$

en 0 elders. Differentieren naar v geeft $f_V(v) = 1/2\sqrt{v}$, $v \in (0,1]$. Samen geeft dit $f_{U,V}(u,v) = \log(\frac{1}{u})/2\sqrt{v}$, $u, v \in (0,1]$, en 0 elders.

(7) (a) Schrijf (zie p. 67 van het boek)

$$f_Y(x)dx = \begin{cases} \mathbb{P}(X \in (x, x+dx]), & x \in (-c,c), \\ \mathbb{P}(X \in (-x-dx, -x]), & x \in \mathbb{R}\backslash(-c,c). \end{cases}$$

De eerste regel is gelijk aan $f_X(x)dx$, de tweede $f_X(-x)dx$. Omdat $f_X(x) = f_X(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, volgt dat het rechterlid gelijk is aan $F_X(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) De covariantie van X en Y is gelijk aan (zie Stelling 5.58 en p. 115 van het boek)

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} dx\, xy(x)\, f_X(x) - 0 \times 0,$$

met $y(x) = x$ als $|x| < c$ en $y(x) = -x$ als $|x| \geq c$. De integraal is gelijk aan

$$\int_{(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x) - \int_{\mathbb{R}\backslash(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x) = 1 - 2\int_{\mathbb{R}\backslash(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x).$$

De integraal kan niet in gesloten vorm worden uitgerekend.