Hertentamen Algebra 3, maandag 10 juli 2023, 9.00 – 12.00 uur.
(Onno Berrevoets, Bart de Smit, Marco Streng)
• Bij dit tentamen mogen de dictaten Algebra 1, 2 en 3 van Peter Stevenhagen gebruikt worden. Markeringen, onderstrepingen en **korte** annotaties zijn toegestaan, maar andere aantekeningen niet. Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.
• Bewijs **al** je antwoorden en geef duidelijke verwijzingen naar resultaten die je gebruikt.

Opgave 1. Bepaal van elk van de volgende lichaamsuitbreidingen of ze normaal is **en** of ze separabel is. Met het wortelsymbool geven we de positieve reële wortel aan. Je mag, zonder dit te bewijzen, gebruiken dat het inderdaad lichaamsuitbreidingen zijn.

(a) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})$,

(b) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt[4]{4})$,

(c) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\zeta+\zeta^2+\zeta^{-1}+\zeta^{-2})$ voor de primitieve 2023ste eenheidswortel $\zeta = \exp(2\pi i/2023) \in \mathbf{C}$,

(d) $\mathbf{F}_3(t) \subset \mathbf{F}_3(t)[X]/(X^3 + t)$,

(e) $\mathbf{F}_3(t) \subset \mathbf{F}_3(t)[X]/(X^3 - X + t)$,

(f) $\mathbf{F}_3(t) \subset \mathbf{F}_3(t)[X]/(X^3 + X + t)$.

Opgave 2. Definieer het polynoom $f = x^4 - 30x^2 + 25 \in \mathbf{Z}[X]$. Zij $\alpha \in \mathbf{C}$ een nulpunt van f.

(a) Laat zien dat $\beta = 2\alpha^3 - 70\alpha$ en $\gamma = 2\alpha^3 - 50\alpha$ beide graad 2 over $\mathbf{Q}$ hebben en bewijs $\beta \notin \mathbf{Q}(\gamma)$.

(b) Laat zien dat er geldt $\mathbf{Q}(\beta, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha)$.

(c) Bewijs dat f irreducibel is.

(d) Bewijs dat $\mathbf{Q}(\alpha)$ Galois is over $\mathbf{Q}$ en bepaal de Galoisgroup $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ op isomorfie na.

(e) Geef alle deellichamen van $\mathbf{Q}(\alpha)$.

(f) Laat zien dat er maar eindig veel priemgetallen p bestaan waarvoor het polynoom $(f \bmod p) \in \mathbf{F}_p[X]$ irreducibel is.
[Er zijn zelfs helemaal geen dergelijke priemgetallen, maar dat hoef je niet te bewijzen.]

Opgave 3. Definieer $H_n \subset \mathbf{C}$ als de verzameling hoekpunten van de regelmatige n-hoek met middelpunt 0 en hoekpunt 1. Ga voor elk van de volgende tweetallen verzamelingen $S, T \subset \mathbf{C}$ na of de elementen van T construeerbaar zijn uitgaande van S.

(a) $S = H_7$, $T = H_{21}$,

(b) $S = H_3$, $T = H_9$,

(c) $S = \{0, 1\}$, $T = \{x \in \mathbf{C} : x^3 = 8\}$,

(d) $S = \{0, 1\}$, $T = \{x \in \mathbf{C} : x^3 = 9\}$.

Vergeet de opgave op de achterkant niet!

Opgave 4.

(a) Zij $\mathbf{Q} \subset K$ een Galoisuitbreiding van oneven graad. Bewijs dat het beeld van elk ringhomomorfisme $K \to \mathbf{C}$ een deellichaam van $\mathbf{R}$ is.

(b) Geef een voorbeeld van een Galoisuitbreiding van $\mathbf{Q}$ van oneven graad $d > 1$.

(c) Geef een voorbeeld van een lichaamsuitbreiding $\mathbf{Q} \subset K$ van oneven graad waarvoor geldt $K \subset \mathbf{C}$, maar $K \not\subset \mathbf{R}$.

Veel succes!