Tentamen Algebra 3, maandag 19 juni 2023, 9.00 – 12.00 uur.
(Onno Berrevoets, Bart de Smit, Marco Streng)
• Bij dit tentamen mogen de dictaten Algebra 1, 2 en 3 van Peter Stevenhagen gebruikt worden. Markeringen, onderstrepingen en **korte** annotaties zijn toegestaan, maar andere aantekeningen niet. Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.
• Bewijs **al** je antwoorden en geef duidelijke verwijzingen naar resultaten die je gebruikt.
• Opgaven 1, 2, 3 en 5 zijn evenveel punten waard. Opgave 4 is half zoveel punten waard als elk van de andere. Niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.

Opgave 1. Bepaal van elk van de volgende lichaamsuitbreidingen of ze normaal is **en** of ze separabel is.

(a) $\mathbf{F}_7(t) \subset \mathbf{F}_7(t)[X]/(X^7 + t + 1)$

(b) $\mathbf{F}_5(t) \subset \mathbf{F}_5(t)[X]/(X^4 - t)$

(c) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt[5]{3})$

Opgave 2. Laat $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $\beta = i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \in \mathbf{C}$, waarbij waar mogelijk de positieve reële wortel genomen wordt. Schrijf $K = \mathbf{Q}(\alpha) \subset \mathbf{C}$.

(a) Laat zien dat $\alpha\beta \in K$.

(b) Bewijs dat de uitbreiding $\mathbf{Q} \subset K$ Galois is.

(c) Bepaal de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ op isomorfie na.

Opgave 3. Ga voor elk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{C}$ na hoeveel punten daarvan met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden vanuit $\{0, 1\}$.

(a) $\{1/7, \sqrt{3 + \sqrt{2}}\}$,

(b) de nulpuntsverzameling van $X^4 + X^3 - 2$,

(c) de verzameling van hoekpunten van een regelmatige 21-hoek met middelpunt 0 en hoekpunt 1.

Vergeet de opgaven op de achterkant niet!

Opgave 4. Zij $f \in \mathbf{Z}[X]$ een monisch polynoom van graad 5. Stel dat er een priemgetal p en een eindig lichaam F van orde p^2 bestaan zó dat f geen nulpunten heeft in F. Laat zien dat f irreducibel is.

Opgave 5.

(a) Zij L/K een eindige abelse Galoisuitbreiding. Laat zien dat voor ieder tweetal tussenlichamen E_1, E_2 van $K \subset L$ geldt
$$[L : E_1 \cap E_2] \leq [L : E_1] \cdot [L : E_2].$$

(b) Zij $n \geq 3$ geheel en zij $K \subset L$ een eindige Galoisuitbreiding met Galoisgroep S_n. Laat zien dat er tussenlichamen E_1, E_2 van $K \subset L$ zijn met
$$[L : E_1 \cap E_2] > [L : E_1] \cdot [L : E_2].$$

Veel succes!