## Analyse 2, 2022-2023

# Eindtentamen

### Vrijdag 16 juni, 13:15 – 16:15

- Toegestane bronnen:
  - Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*
  - het toevoegingen-document op Brightspace (toevoegingen_2223.pdf)
  - hoorcollegenotities (beschikbaar via Brightspace)
  - één kantje A4 met handgeschreven aantekeningen
- Dit tentamen heeft drie opgaven. Begin iedere opgave op een nieuwe pagina, met naam en studentnummer
- Motiveer ieder antwoord met een berekening, redenering, en/of verwijzing naar de theorie
- Als je een bepaalde deelopgave niet hebt kunnen maken, ga dan door naar de volgende deelopgave; de meeste deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar te beantwoorden
- Wat mag je <u>niet</u> gebruiken: rekenmachine, digitale bronnen

# Opgave 1 [11 punten]

Bekijk de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (4x^2 + y^2 + 1)e^{-(x^2+y^2)/4}$.

**[1 punt]** **a)** Laat zien dat

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x(15-4x^2-y^2)}{2}e^{-(x^2+y^2)/4}, \frac{y(3-4x^2-y^2)}{2}e^{-(x^2+y^2)/4}\right).$$

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \left(8x\,e^{-(x^2+y^2)/4} + (4x^2+y^2+1)(-\frac{1}{2}x)e^{-(x^2+y^2)/4}, 2y\,e^{-(x^2+y^2)/4} + (4x^2+y^2+1)(-\frac{1}{2}y)e^{-(x^2+y^2)/4}\right) \\
&= \left(\frac{x}{2}(16-4x^2-y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/4}, \frac{y}{2}(4-4x^2-y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/4}\right) \\
&= \left(\frac{x(15-4x^2-y^2)}{2}e^{-(x^2+y^2)/4}, \frac{y(3-4x^2-y^2)}{2}e^{-(x^2+y^2)/4}\right)
\end{aligned}$$

met behulp van de kettingregel en de productregel.

**[1 punt]** **b)** Zij $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ willekeurig. Laat zien dat $f(x, y)$ differentieerbaar is in $(x_0, y_0)$.

We gebruiken Theorem 4, p. 732 uit het boek. Uit vraag a) zien we dat iedere partiële afgeleide van $f$ de vorm heeft $p(x,y)e^{q(x,y)}$, met $p(x,y)$ en $q(x,y)$ allebei polynomen in $x$ en $y$. Deze polynomen zijn continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De functie $t \mapsto e^t$ is continu voor alle $t$, dus volgens de rekenregels op p. 705 is $e^{q(x,y)}$ continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Volgens dezelfde rekenregels is het product van $p(x,y)$ en $e^{q(x,y)}$ dus ook continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. We concluderen dat zowel $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu is voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dus ook in een omgeving van een willekeurig punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. We gebruiken Theorem 4, p.732 om te concluderen dat $f$ differentieerbaar is in $(x_0, y_0)$.

**[1 punt]** **c)** Laat zien dat de verzameling kritieke punten van $f$ gegeven wordt door

$$Q = \left\{(0,0), (0, \pm\sqrt{3}), (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{15}, 0)\right\}. \tag{1}$$

Een punt $(x_0, y_0)$ is een kritiek punt van $f$ als $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. De $e$-macht is altijd groter dan nul, dus we hebben de vergelijkingen $x(15 - 4x^2 - y^2) = 0$ en $y(3 - 4x^2 - y^2) = 0$. Het is direct duidelijk dat $(x, y) = (0, 0)$ een oplossing is. De aanname $x = 0$, $y \neq 0$ levert $y(3 - y^2) = 0$, waaruit volgt dat $y = \pm\sqrt{3}$. De aanname $y = 0, x \neq 0$ levert $x(15 - 4x^2) = 0$, waaruit volgt dat $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$. De laatste optie is $x \neq 0$ en $y \neq 0$, waaruit volgt dat $15 - 4x^2 - y^2 = 0$ en $3 - 4x^2 - y^2 = 0$. Dit levert echter de tegenspraak $15 = 4x^2 + y^2 = 3$, dus er zijn niet meer kritieke punten dan die in $Q$.

Je mag gebruiken dat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{30 + 4x^4 - 2y^2 - 39x^2 + x^2y^2}{4}e^{-(x^2+y^2)/4}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{xy(-19 + 4x^2 + y^2)}{4}e^{-(x^2+y^2)/4}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{6 - 9y^2 + y^4 - 8x^2 + 4x^2y^2}{4}e^{-(x^2+y^2)/4},
\end{aligned}$$

en je mag zonder bewijs aannemen dat deze tweede afgeleiden continu zijn op heel $\mathbb{R}^2$.

**[2 punten]** **d)** Laat zien dat $(0,0)$ een lokaal minimum is van $f$, dat $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$ lokale maxima zijn van $f$, en dat $(0,\pm\sqrt{3})$ zadelpunten zijn van $f$.

We gebruiken Stelling 7.1 (toevoegingen). We beginnen met het kritieke punt $(0,0)$, waarvoor geldt dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. We berekenen $K = \frac{15}{2}\cdot\frac{3}{2} - 0 = \frac{45}{4} > 0$, en concluderen dat $(0,0)$ een lokaal minimum is omdat ook $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$.
Voor $x = 0, y = \pm\sqrt{3}$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm\sqrt{3}) = \frac{30-6}{4}e^{-3/4} = 6e^{-3/4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pm\sqrt{3}) = 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pm\sqrt{3}) = \frac{6-27+9}{4}e^{-3/4} = -3e^{-3/4}$. We berekenen $K = 6e^{-3/4}\cdot(-3)e^{-3/4} == -18e^{-3/2} < 0$, dus de punten $(0,\pm\sqrt{3})$ zijn zadelpunten.
Voor $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$, $y = 0$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0) = \frac{30+\frac{15\cdot 15}{4}-39\frac{15}{4}}{4}e^{-15/16} = \frac{15(2+\frac{15}{4}-\frac{39}{4})}{4}e^{-15/16} = \frac{15(2-\frac{24}{4})}{4}e^{-15/16} = \frac{15(2-6)}{4}e^{-15/16} = -15e^{-15/16}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0) = 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0) = \frac{6-8\frac{15}{4}}{4}e^{-15/16} = \frac{6-30}{4}e^{-15/16} = -6e^{-15/16}$. We berekenen $K = (-15)e^{-15/16}\cdot(-6)e^{-15/16} > 0$ en concluderen dat $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0)$ lokale maxima zijn omdat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15},0) < 0$.

**[1 punt]** **e)** Bepaal de Taylorreeks van $f$ rond $(0,0)$ tot en met de tweede-orde termen.

De Taylorreeks van $f$ rond $(0,0)$ tot en met de tweede-orde termen wordt gegeven door

$$f(x,y) \approx f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\,xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right).$$

Omdat voor onze $f$ alle partiële afgeleiden overal continu zijn, geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. We weten dat $\nabla f(0,0) = (0,0)$ want $(0,0)$ is een kritiek punt; bovendien hebben we in de vorige vraag uitgerekend dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Invullen levert

$$f(x,y) \approx 1 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2$$

omdat $f(0,0) = 1$.

Bekijk de niveauverzameling

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x,y) = 1\right\}. \tag{2}$$

Merk op dat $(0,0) \in E$.

**[1 punt]** **f)** Bestaat er een omgeving van $(0,0)$ waarin $E$ kan worden geschreven als de grafiek van een continu differentieerbare functie $\phi(x)$? Motiveer je antwoord.

Er geldt dat $\nabla f(0,0) = (0,0)$, dus we voldoen niet aan de voorwaarden van de impliciete-functiestelling. *Let op!* Hieruit kun je niet concluderen dat de *uitspraak* van de impliciete-functiestelling niet geldt!
We moeten bepalen wat er precies aan de hand is in $(0,0)$. We weten dat $(0,0)$ een lokaal minimum is van $f$ (vraag 2d), dus dat $f(x,y) > f(0,0)$ voor alle $(x,y)$ in een omgeving van $(0,0)$. Dat betekent dat $(0,0)$ een geïsoleerd punt is in de niveauverzameling $E$; hetzelfde is bijvoorbeeld aan de hand met de niveauverzameling $\left\{x^2+y^2=0\right\}$. Daarom kan $E$ in de buurt van $(0,0)$ niet worden geschreven als grafiek van een continu differentieerbare functie.

De verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als

$$W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 \le 1\right\}. \tag{3}$$

Je mag aannemen dat $W$ een gesloten verzameling is.

**[1 punt]** **g)** Laat zien dat $W$ een begrensde verzameling is.
*Hint:* Vind een $r > 0$ is zodat voor alle $(x, y) \in W$ geldt dat $x^2 + y^2 < r$.

Neem $(x, y) \in W$. Uit $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 \leq 1$ volgt $\frac{3}{2}x^2 + y^2 \leq 3$, dus $x^2 + y^2 \leq 3 < r$ voor iedere $r > 3$, bijvoorbeeld $r = 4$. We zien dat $W$ geheel bevat is in de bol $B_4((0, 0))$, dus $W$ is een begrensde verzameling.

**[2 punten]** **h)** De rand van $W$ is gegeven als $\partial W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1\right\}$. Bepaal alle mogelijke extrema van $f$ op $\partial W$.

We kunnen twee dingen doen: de rand van $W$ expliciet parametriseren, of Lagrange-multipliers gebruiken.
*Parametrisatie:* De rand van $W$ is een ellips, dus we proberen als parametrisatie $r(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ voor een zekere $a, b \in \mathbb{R}$. Invullen geeft $\frac{a^2}{2} \cos^2(t) + \frac{b^2}{3} \sin^2(t) = 1$ voor alle $t$, wat we bijvoorbeeld kunnen bereiken met $a^2 = 2$ en $b^2 = 3$, dus bijvoorbeeld $a = \sqrt{2}$ en $b = \sqrt{3}$. We definiëren $h(t) = f(r(t)) = \left(8\cos^2(t) + 3\sin^2(t) + 1\right) e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4}$, en berekenen

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= (-16\sin(t)\cos(t) + 6\sin(t)\cos(t))\, e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4} \\
&\quad + \left(8\cos^2(t) + 3\sin^2(t) + 1\right)(\sin(t)\cos(t) - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t))e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4} \\
&= \left(-10\sin(t)\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)\left(8\cos^2(t) + 3\sin^2(t) + 1\right)\right) e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4} \\
&= -\sin(t)\cos(t)\left(10 + 4\cos^2(t) + \frac{3}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\right) e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4}
\end{aligned}
$$

Omdat $0 \leq \cos^2(t) \leq 1$ en $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, vinden we dat $(10 + 4\cos^2(t) + \frac{3}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2} > 0$. Bovendien geldt $e^{-(2\cos^2(t)+3\sin^2(t))/4} > 0$, dus de nulpunten van $h'(t)$ worden gegeven door de nulpunten van $\sin(t)\cos(t)$. We concluderen dat $h'(t) = 0$ dan en slechts dan als $t = \frac{n\pi}{2}$, met $n = 0, 1, 2, 3$. De mogelijke extrema van $f$ op $\partial W$ zijn dus $r(0) = (\sqrt{2}, 0)$, $r(\pi/2) = (0, \sqrt{3})$, $r(\pi) = (-\sqrt{2}, 0)$ en $r(3\pi/2) = (0, -\sqrt{3})$.
*Lagrange-multipliers:* We willen de extrema van $f(x, y)$ bepalen, gegeven de restrictie $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$. We definiëren de Lagrange-functie $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, en bepalen de kritieke punten van $L$. We krijgen de vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{x(15 - 4x^2 - y^2)}{2} e^{-(x^2+y^2)/4} + \lambda \cdot x \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{y(3 - 4x^2 - y^2)}{2} e^{-(x^2+y^2)/4} + \lambda \cdot \frac{2}{3} y \overset{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Uit de eerste vergelijking volgt $x = 0$ of $\lambda = -\frac{15-4x^2-y^2}{2} e^{-(x^2+y^2)/4}$, en uit de tweede vergelijking volgt $y = 0$ of $\lambda = -\frac{3}{2}\frac{3-4x^2-y^2}{2} e^{-(x^2+y^2)/4}$. Uit de derde vergelijking volgt dat $x$ en $y$ niet allebei nul kunnen zijn.
De keuze $x = 0$, $y \neq 0$ levert $\frac{1}{3}y^2 = 1$, dus $y = \pm\sqrt{3}$ (we hoeven $\lambda$ niet te berekenen). De keuze $x \neq 0$, $y = 0$ levert $\frac{1}{2}x^2 = 1$, dus $x = \pm\sqrt{2}$.
Dan blijft nog de mogelijkheid $x \neq 0$, $y \neq 0$ over. Dit leidt tot $-\frac{15-4x^2-y^2}{2} e^{-(x^2+y^2)/4} = \lambda = -\frac{3}{2}\frac{3-4x^2-y^2}{2} e^{-(x^2+y^2)/4}$, waaruit volgt dat $15 - 4x^2 - y^2 = \frac{3}{2}\left(3 - 4x^2 - y^2\right)$, wat herschreven kan worden tot $15 - \frac{9}{2} + 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0$. Omdat $15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2} > 0$, zijn er geen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die aan deze vergelijking voldoen. We hebben dus alle mogelijke extrema van $f$ op $\partial W$ gevonden, namelijk $(0, \pm\sqrt{3})$ en $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

**[1 punt]** **i)** Leg uit waarom $f$ beperkt tot $W$ zowel maxima als minima heeft, en bepaal deze maxima en minima. Je mag gebruiken dat $e^{-3/4} \approx 0.5$ en $e^{-1/2} \approx 0.6$.

Het domein $W$ is gesloten (gegeven) en begrensd (uitkomst van vraag g), dus volgens Thm 2, p.771 neemt $f$ maxima en minima aan op $W$. Omdat $\frac{1}{2}\sqrt{15} = \sqrt{\frac{15}{4}} > \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$, liggen de kritieke punten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{15}, 0)$ buiten $W$. We hebben één kritiek punt van $f$ in het binnenste van $W$, namelijk $(0, 0)$, en vier kritieke punten op de rand van $W$, namelijk $(0, \pm\sqrt{3})$ en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (vraag h).
We berekenen $f(0, 0) = 1$, $f(0, \pm\sqrt{3}) = (3 + 1)e^{-3/4} = 4e^{-3/4} \approx 4 \cdot 0.5 = 2$ en $f(\pm\sqrt{2}, 0) = (8 + 1)e^{-2/4} = 9e^{-1/2} \approx 9 \cdot 0.6 = 5.4$. We zien dat $(0, 0)$ het minimum is van $f$ beperkt tot $W$, en dat $(\pm\sqrt{2}, 0)$ de maxima zijn van $f$ beperkt tot $W$. Hoewel $(0, \pm\sqrt{3})$ lokale minima van $f$ op de rand van $W$ zijn, zijn het geen minima van $f$ op heel $W$.

## Opgave 2 [5 punten]

Zij $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ het vectorveld gegeven door

$$F(x, y) = (ye^y + y\cos(xy), (x + xy + 1)e^y + x\cos(xy)) . \tag{4}$$

**[1.5 punten]** **a)** Laat zien dat $F$ conservatief is op $\mathbb{R}^2$.

We willen een functie $\phi(x, y)$ vinden waarvoor $F(x, y) = \nabla\phi(x, y)$. Dat betekent dat $\frac{\partial\phi}{\partial x} = ye^y + y\cos(xy)$, dus $\phi(x, y) = xye^y + \sin(xy) + k(y)$, voor een nog onbepaalde functie $k(y)$. Hieruit volgt dat $\frac{\partial\phi}{\partial y} = xe^y + xye^y + x\cos(xy) + k'(y)$, en dit moet gelijk zijn aan $(x + xy + 1)e^y + x\cos(xy)$. Er volgt dat $k'(y) = e^y$, dus $k(y) = e^y + \text{constante}$. We vinden $\phi(x, y) = (xy + 1)e^y + \sin(xy)$, waarvoor $\nabla\phi(x, y) = F(x, y)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**[1.5 punten]** **b)** Zij $\ell_1$ het lijnstuk tussen $(0, 0)$ en $(2, 0)$, en $\ell_2$ het lijnstuk tussen $(2, 0)$ en $(2, 2)$. Definieer $C$ als het pad dat van $(0, 0)$ over $\ell_1$ en $\ell_2$ naar $(2, 2)$ loopt.
Bereken $\int_C \langle F, dr\rangle$.

We kunnen de integraal direct berekenen door $C$ te parametriseren, of gebruiken dat $F$ conservatief is.
*Directe berekening:* Neem $r_1(t) = (t, 0)$ met $0 \le t \le 2$, en $r_2(t) = (2, t)$ met $0 \le t \le 2$. We berekenen $F(r_1(t)) = (0, t+1+t) = (0, 2t+1)$ en $\frac{dr_1}{dt} = (1, 0)$, dus $\left\langle F(r_1(t)), \frac{dr_1}{dt}\right\rangle = \langle(0, 2t + 1), (1, 0)\rangle = 0$.
Voor het andere lijnstuk geldt $F(r_2(t)) = (te^t + t\cos(2t), (2 + 2t + 1)e^t + 2\cos(2t))$ en $\frac{dr_2}{dt} = (0, 1)$, dus $\left\langle F(r_2(t)), \frac{dr_2}{dt}\right\rangle = \langle(te^t + t\cos(2t), (3 + 2t)e^t + 2\cos(2t)), (0, 1)\rangle = (3 + 2t)e^t + 2\cos(2t)$.
We zien dus dat $\int_C \langle F, \mathrm{d}r\rangle = \int_{t=0}^{2} (3 + 2t)e^t + 2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$. Omdat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(te^t) = (t + 1)e^t$, zien we dat $(3 + 2t)e^t = e^t + 2(1 + t)e^t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^t + 2te^t)$. Dit levert $\int_{t=0}^{2} (3 + 2t)e^t + 2\cos(2t)\,\mathrm{d}t = [(1 + 2t)e^t + \sin(2t)]_{t=0}^{2} = 5e^2 + \sin(4) - 1$.
*F is conservatief:* Omdat $F$ conservatief is, geldt dat $\int_C \langle F, \mathrm{d}r\rangle = \phi(2, 2) - \phi(0, 0)$ omdat het pad $C$ van $(0, 0)$ naar $(2, 2)$ loopt, zie Thm 1, p. 909. We berekenen $\phi(2, 2) = (4 + 1)e^2 + \sin(4)$ en $\phi(0, 0) = e^0 + 0 = 1$, dus $\int_C \langle F, \mathrm{d}r\rangle = 5e^4 + \sin(t) - 1$.

Zij $R \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\right\}. \tag{5}$$

De rand van $R$ is dus het vierkant met hoekpunten $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ en $(0, 2)$. Definieer $\mathcal{E}$ als het gesloten pad dat de rand van $R$ doorloopt, met positieve oriëntatie ten opzichte van $R$, en dat begint (en eindigt) in $(0, 0)$.

**[2 punten]** **c)** Definieer het vectorveld $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als $G(x, y) = F(x, y) + (0, ax^2)$, met $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Bereken $\int_{\mathcal{E}} \langle G, \mathrm{d}r \rangle$ met behulp van de stelling van Green.

We voldoen aan de voorwaarden van de stelling van Green, want $R$ is een regulier en gesloten gebied, en de rand bestaat uit een eindig aantal (één) stuksgewijs gladde, gesloten krommen, die positief georiënteerd zijn ten opzichte van $R$ (namelijk $\mathcal{E}$). De stelling van Green geeft dan dat

$$\int_{\mathcal{E}} \langle G, \mathrm{d}r \rangle = \int_R \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \, \mathrm{d}A.$$

We berekenen $\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + 2ax = (1 + y)e^y + \cos(xy) - xy \sin(xy) + 2ax$ en $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^y + ye^y + \cos(xy) - xy \sin(xy)$. We vinden dus $\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = (1 + y)e^y + \cos(xy) - xy \sin(xy) + 2ax - (1 + y)e^y - \cos(xy) + xy \sin(xy) = 2ax$.
Merk op dat we hetzelfde resultaat hadden kunnen vinden door op te merken dat $\int_{\mathcal{E}} \langle G, \mathrm{d}r \rangle = \int_{\mathcal{E}} \langle F, \mathrm{d}r \rangle + \int_{\mathcal{E}} \left\langle (0, ax^2), \mathrm{d}r \right\rangle = 0 + \int_{\mathcal{E}} \left\langle (0, ax^2), \mathrm{d}r \right\rangle$, omdat $F$ een conservatief vectorveld is en $\mathcal{E}$ een gesloten pad. Met Green volgt vervolgens $\int_{\mathcal{E}} \left\langle (0, ax^2), \mathrm{d}r \right\rangle = \int_R 2ax \, \mathrm{d}A$.
We berekenen de gevraagde oppervlakte-integraal als

$$\begin{aligned}
\int_R 2ax \, \mathrm{d}A &= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0^2} 2ax \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{2} [2axy]_{y=0}^{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{2} 4ax \, \mathrm{d}x \\
&= \left[2ax^2\right]_{x=0}^{2} = 8a.
\end{aligned}$$

## Opgave 3 [4 punten]

Zij $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de afbeelding gegeven door

$$\Phi(x, y) = (x - y, x + y)\,. \tag{6}$$

**[2 punten]** **a)** Laat met behulp van de definitie zien dat $\Phi$ een coördinaattransformatie is tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Volgens Definitie 3.1 (toevoegingen) moeten we laten zien dat $\Phi$ bijectief is tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, dat $\Phi$ continu is, en dat $\Psi = \Phi^{-1}$ ook continu is.
We schrijven $(r, s) = \Phi(x, y) = (x - y, x + y)$. Hieruit volgt dat $r + s = x - y + x + y = 2x$, dus $x = \frac{r+s}{2}$. Op dezelfde manier zien we dat $r - s = x - y - x - y = -2y$, dus $y = \frac{s-r}{2}$. Gegeven een punt $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, kunnen we dus altijd $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vinden zodat $\Phi(x, y) = (r, s)$; hieruit volgt dat $\Phi$ surjectief is.
Stel nu dat $\Phi(x_0, y_0) = (r, s) = \Phi(x_1, y_1)$. Daaruit volgt dat $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ en $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$. Optellen van beide vergelijkingen levert $2x_0 = 2x_1$ dus $x_0 = x_1$; het verschil nemen van beide vergelijkingen levert $-2y_0 = -2y_1$, dus $y_0 = y_1$. Hieruit volgt dat $\Phi$ injectief is.
Iedere component van $\Phi$ is een polynoom in $x$ en $y$, en daarom continu op heel $\mathbb{R}^2$. Hetzelfde geldt voor iedere component van $\Psi(r, s) = \left(\frac{r+s}{2}, \frac{s-r}{2}\right)$. We kunnen concluderen dat $\Phi$ voldoet aan de definitie van een coördinaattransformatie tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Als alternatief voor het bovenstaande kun je vaststellen dat $\Phi$ een lineaire afbeelding is, die we kunnen schrijven als

$$\Phi(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$ is een vierkante matrix met determinant $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2$, dus heeft een triviale nulruimte. Daarom volgt uit $Az_0 = Az_1$ met $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^2$ dat $A(z_0 - z_1) = 0$ als enige oplossing $z_0 - z_1 = 0$ heeft, dus is $\Phi$ injectief. Uit het feit dat $\Psi(r,s) == A^{-1}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ overal op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd is, volgt dat $\Phi$ surjectief is. Een lineaire afbeelding is continu vanwege de bovenstaande redenering, en de inverse afbeelding $\Psi(r,s)$ is dat om dezelfde redenen ook.

Zij $U \subset \mathbb{R}^2$ de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$.

**[2 punten]** **b)** Laat zien dat

$$\int_U e^{(x-y)/(x+y)} \mathrm{d}A = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

De hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ worden door $\Phi$ afgebeeld op de punten $(0,0)$, $(1,1)$ en $(-1,1)$. De driehoek $U$ wordt dus afgebeeld op de driehoek $V$ met bovenstaande hoekpunten; in termen van nieuwe coördinaten $(r,s) = \Phi(x,y)$ kan $V$ dus worden geschreven als

$$V = \left\{ (r,s) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -s \leq r \leq s, \ 0 \leq s \leq 1 \right\},$$

zie ook Figuur 1. We willen Stelling 5.3/Gevolg 5.4 (toevoegingen) gebruiken, dus we berekenen

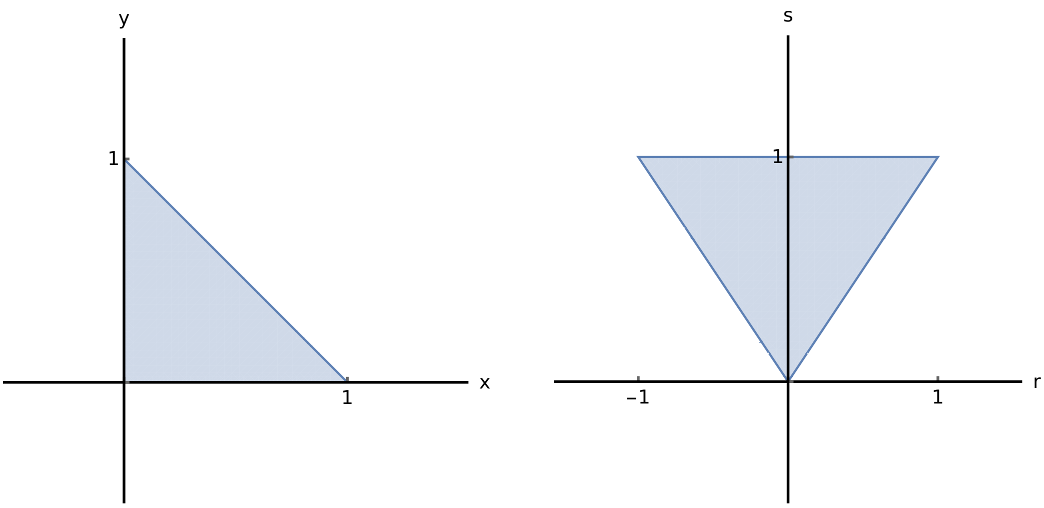
$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

waaruit volgt dat $\det D\Phi = 2$. Met deze informatie kunnen we de gevraagde integraal als volgt transformeren:

$$\int_U e^{(x-y)/(x+y)} \mathrm{d}A = \int_V e^{r/s} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}A.$$

We berekenen

$$\begin{aligned}
\int_V e^{r/s} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}A &= \frac{1}{2} \int_{s=0}^{1} \int_{r=-s}^{s} e^{r/s}\, \mathrm{d}r \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \int_{s=0}^{1} \left[ s\, e^{r/s} \right]_{r=-s}^{s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \int_{s=0}^{1} s\left(e^1 - e^{-1}\right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \left(e^1 - e^{-1}\right) \left[ \frac{1}{2} s^2 \right]_{s=0}^{1} \\
&= \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).
\end{aligned}$$




Figuur 1: De verzameling $U$ in het $(x, y)$-vlak, en $V$ in het $(r, s)$-vlak.