Analyse 2, 2022-2023

Hertentamen

Dinsdag 4 juli, 09:00 – 12:00

- Toegestane bronnen:
  - Adams & Essex, *Calculus: A Complete Course*
  - het toevoegingen-document op Brightspace (toevoegingen_2223.pdf)
  - hoorcollegenotities (beschikbaar via Brightspace)
  - één kantje A4 met handgeschreven aantekeningen
- Dit tentamen heeft drie opgaven. Begin iedere opgave op een nieuwe pagina, met naam en studentnummer
- Motiveer ieder antwoord met een berekening, redenering, en/of verwijzing naar de theorie
- Als je een bepaalde deelopgave niet hebt kunnen maken, ga dan door naar de volgende deelopgave; de meeste deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar te beantwoorden
- Wat mag je niet gebruiken: rekenmachine, digitale bronnen

Opgave 1 [12 punten]

Bekijk de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{als} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{als} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

[1.5 punten] **a)** Laat zien dat voor alle $(x,y) \neq (0,0)$ geldt dat

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x(3x^4-x^2+4x^2y^2-y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y(-x^4-y^2+3y^4-x^2+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right).$$

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
&= \left(\frac{4x^3-2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{x^4+y^4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot 2x, \frac{4y^3-2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{x^4+y^4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot 2y \right) \\
&= \left(x\frac{(x^2+y^2)(4x^2-2)-(x^4+y^4-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, y\frac{(x^2+y^2)(4y^2-2)-(x^4+y^4-x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \\
&= \left(x\frac{4x^4-2x^2+4x^2y^2-2y^2-x^4-y^4+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, y\frac{4x^2y^2-2x^2+4y^4-2y^2-x^4-y^4+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \\
&= \left(\frac{x(3x^4-x^2+4x^2y^2-y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y(-x^4-y^2+3y^4-x^2+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned}$$

met behulp van de kettingregel en de productregel.

[1 punt] **b)** Zij $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ willekeurig. Laat zien dat $f(x,y)$ differentieerbaar is in (x_0,y_0).

We gebruiken Theorem 4, p. 732 uit het boek. Uit vraag a) zien we dat iedere partiële afgeleide van f de vorm heeft $\frac{p(x,y)}{\sqrt{q(x,y)}}$, met $p(x,y)$ en $q(x,y)$ allebei polynomen in x en y. Deze polynomen zijn continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De functie $t \mapsto \sqrt{t}$ is continu voor alle $t \geq 0$, dus volgens de rekenregels op p. 705 is $\sqrt{q(x,y)}$ continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zodanig dat $q(x,y) \geq 0$. Omdat $q(x,y) = (x^2+y^2)^3$, zien we dat $q(x,y) \geq 0$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Volgens dezelfde rekenregels is het quotiënt van $p(x,y)$ en $\sqrt{q(x,y)}$ continu voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt dat $\sqrt{q(x,y)} \neq 0$. Omdat $\sqrt{t} = 0$ dan en slechts dan als $t = 0$, moeten we alle (x,y) uitsluiten waarvoor geldt dat $q(x,y) = 0$. Omdat $q(x,y) = (x^2+y^2)^3 = 0$ dan en slechts dan als $x^2+y^2 = 0$, zien we dat $q(x,y) \neq 0$ voor alle $(x,y) \neq (0,0)$.
We concluderen dat zowel $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu is voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, dus ook in een omgeving van een willekeurig punt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. We gebruiken Theorem 4, p.732 om te concluderen dat f differentieerbaar is in (x_0,y_0).
Merk op: Dezelfde redenering geldt als je iedere partiële afgeleide van f schrijft als $\frac{p(x,y}{(r(x,y))^{3/2}}$, met $r(x,y) = x^2+y^2$. De relevante eigenschappen van $t \mapsto t^{3/2}$ zijn hetzelfde als van $t \mapsto \sqrt{t}$.

[1.5 punten] **c)** Laat zien dat minstens één van de partiële afgeleiden van $f(x,y)$ niet continu is in $(x,y) = (0,0)$. Kun je hieruit afleiden dat f niet differentieerbaar is in $(x,y) = (0,0)$? Motiveer je antwoord.

We bekijken de limiet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$. Het idee is om te laten zien dat deze limiet niet bestaat. We proberen de 'lijnentest', dus we lopen over de lijn $y = kx$ naar de oorsprong toe. We berekenen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx) &= \frac{x\left(3x^4 - x^2 + 4k^2x^4 - k^2x^2 - k^4x^4\right)}{(x^2+k^2x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(3+4k^2-k^4)x^5 - (1+k^2)x^3}{x^3\,(1+k^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{1+k^2}{(1+k^2)^{3/2}} + x^2\frac{3+4k^2-k^4}{(1+k^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

voor $x \neq 0$. We zien dat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,kx) = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

waarbij de limiet dus afhangt van de richting k. De conclusie is dat de limiet $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}$ niet bestaat. De redenering voor $\frac{\partial f}{\partial y}$ is analoog.
Deze observatie is *niet* voldoende om te concluderen dat de functie f niet differentieerbaar is in $(x,y) = (0,0)$. Theorem 4, p.732 zegt dat *als* beide partiële afgeleiden continu zijn in een omgeving van $(0,0)$, dat *dan* de functie f differentieerbaar is in $(0,0)$. Echter, als niet aan de voorwaarden van de stelling wordt voldaan (zoals hier het geval is), kun je niet concluderen dat de *uitspraak* van de stelling niet klopt!

In de volgende deelvragen mag je aannemen dat f niet differentieerbaar is in $(x,y) = (0,0)$.

[1 punt] **d)** Laat zien dat de verzameling kritieke punten van f gegeven wordt door

$$Q = \left\{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}. \tag{2}$$

Een punt (x_0,y_0) is een kritiek punt van f als $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$. We mogen $(x_0,y_0) = (0,0)$ uitsluiten omdat ∇f daar niet bestaat (zie vraag c), dus we krijgen (op basis van vraag a) de vergelijkingen $x(3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4) = 0$ en $y(x^4 + y^2 - 3y^4 + x^2 - 4x^2y^2) = 0$. De oplossing $(x,y) = (0,0)$ valt af, maar we kunnen wel één van beide nul nemen. De aanname $x = 0$, $y \neq 0$ levert $y(y^2 - 3y^4) = 0$, waaruit volgt dat $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. De aanname $y = 0$, $x \neq 0$ levert $x(3x^4 - x^2) = 0$, waaruit volgt dat $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. De laatste optie is $x \neq 0$ en $y \neq 0$, waaruit volgt dat $3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4 = 0$ en $x^4 + y^2 - 3y^4 + x^2 - 4x^2y^2 = 0$. We kunnen de mengterm $4x^2y^2$ in iedere vergelijking naar één kant halen, en krijgen $y^4 + y^2 + x^2 - 3x^4 = 4x^2y^2 = x^4 + y^2 - 3y^4 + x^2$. Hieruit volgt dat $y^4 - 3x^4 = x^4 - 3y^4$, dus $4x^4 = 4y^4$, waaruit volt dat $x = \pm y$. Als $x = y$, wordt de eerste vergelijking $3x^4 - x^2 + 4x^4 - x^2 - x^4 = 6x^4 - 2x^2 = 0$, dus $3x^2 = 1$, dus $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Als $x = -y$, wordt de eerste vergelijking hetzelfde (want er staan alleen maar even machten van x en y in, dus volgt weer $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Je mag gebruiken dat

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{6x^6 - x^2y^2 + 15x^4y^2 - y^4 + 14x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{xy(-x^4 + y^2 - y^4 + x^2 - 8x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-x^6 + 6y^6 - x^4 + 14x^4y^2 - x^2y^2 + 15x^2y^4}{(x^2+y^2)^{5/2}},\end{aligned}$$

en je mag zonder bewijs aannemen dat deze tweede afgeleiden continu zijn voor alle $(x,y) \neq (0,0)$.

[2 punten] **e)** Laat zien dat $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ en $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}})$ lokale minima zijn van f, en dat $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ en $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ zadelpunten zijn van f.
Hint: Bespaar jezelf rekenwerk, en gebruik dat $f(x,y) = f(y,x)$ en dat $f(x,y) = f(x,-y)$.

We gebruiken Stelling 7.1 (toevoegingen). We beginnen met de kritieke punten $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$, waarvoor geldt dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = \frac{6/27}{(1/3)^{5/2}} = \frac{2/9}{1/9\cdot(1/3)^{1/2}} = 2\sqrt{3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = \frac{-1/9-1/27}{(1/3)^{5/2}} = \frac{-4(1/3)^3}{(1/3)^{5/2}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}$. We berekenen $K = 2\sqrt{4}\cdot\frac{-4}{\sqrt{3}} - 0 = -8 < 0$, en concluderen dat $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ een zadelpunt is. Uit de eigenschap $f(x,y) = f(y,x)$ volgt dat de punten $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ ook zadelpunten zijn.
Voor $x = \pm 1/\sqrt{3} = y$ geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = \frac{34/27-2/9}{(2/3)^{5/2}} = \frac{28/27}{4/9\cdot(2/3)^{1/2}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = \frac{-10/27+2/9}{(2/3)^{5/2}} = \frac{-4/27}{4/9\cdot(2/3)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = \frac{7}{\sqrt{6}}$ omdat $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$. We berekenen $K = \frac{49}{6} - \frac{1}{6} = \frac{48}{6} > 0$, en concluderen dat $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ lokale minima zijn omdat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) > 0$. Uit de eigenschap $f(x,y) = f(x,-y)$ volgt dat $(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$ ook lokale minima zijn.

[1 punt] **f)** Laat zien dat $(0,0)$ een lokaal maximum is van f.
Hint: Laat zien dat $f(x,y) < 0$ als $0 < x^2 + y^2 < \varepsilon$ voor voldoende kleine $\varepsilon > 0$.

We schatten af

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^4 + y^4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{3/2} - \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\left(-1 + x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

en $\sqrt{x^2+y^2}\left(-1+x^2+y^2\right) < 0$ als $0 < x^2 + y^2 < \varepsilon < 1$. Uit de definitie van f lezen we af dat $f(0,0) = 0$. Omdat voor alle (x,y) in een omgeving van $(0,0)$ geldt dat $f(x,y) < f(0,0) = 0$, is $(0,0)$ een lokaal maximum van f.

De verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{3}\right\}$. Je mag aannemen dat W een gesloten verzameling is.

[2 punten] **g)** De rand van W is gegeven als $\partial W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = \frac{1}{3}\right\}$. Bepaal alle mogelijke extrema van f op ∂W.

We kunnen twee dingen doen: de rand van W expliciet parametriseren, of Lagrange-multipliers gebruiken.
Parametrisatie: De rand van W is een cirkel met straal $1/\sqrt{3}$, dus we nemen als parametrisatie $r(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t), \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(t)\right)$. We definiëren $h(t) = f(r(t)) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{9}\cos^4(t) + \frac{1}{9}\sin^4(t) - \frac{1}{3}\right)$, en berekenen

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{4\sqrt{3}}{9}\sin(t)\cos^3(t) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\sin^3(t)\cos(t) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\sin(t)\cos(t)\left(\sin^2(t) - \cos^2(t)\right) \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin(2t)\cos(2t) = -\frac{\sqrt{3}}{9}\sin(4t). \end{aligned}$$

De nulpunten van $h'(t)$ worden gegeven door de nulpunten van $\sin(4t)$; we concluderen dat $h'(t) = 0$ dan en slechts dan als $t = \frac{n\pi}{4}$, met $n = 0, 1, \ldots, 7$. De mogelijke extrema van f op ∂W zijn dus $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Lagrange-multipliers: We willen de extrema van $f(x, y)$ bepalen, gegeven de restrictie $g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{3} = 0$. We definiëren de Lagrange-functie $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, en bepalen de kritieke punten van L. We krijgen de vergelijkingen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{x(3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \lambda \cdot 2x \stackrel{!}{=} 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{y(-x^4 - y^2 + 3y^4 - x^2 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \lambda \cdot 2y \stackrel{!}{=} 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - \frac{1}{3} \stackrel{!}{=} 0.$$

Uit de eerste vergelijking volgt $x = 0$ of $\lambda = -\frac{3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, en uit de tweede vergelijking volgt $y = 0$ of $\lambda = -\frac{-x^4 - y^2 + 3y^4 - x^2 + 4x^2y^2}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$. Uit de derde vergelijking volgt dat x en y niet allebei nul kunnen zijn.
De keuze $x = 0$, $y \neq 0$ levert $y^2 = \frac{1}{3}$, dus $y = \pm 1/\sqrt{3}$ (we hoeven λ niet te berekenen). De keuze $x \neq 0$, $y = 0$ levert $x^2 = 1/\sqrt{3}$, dus $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
Dan blijft nog de mogelijkheid $x \neq 0$, $y \neq 0$ over. Dit leidt tot $-\frac{3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \lambda = -\frac{-x^4 - y^2 + 3y^4 - x^2 + 4x^2y^2}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, waaruit volgt dat $3x^4 - x^2 + 4x^2y^2 - y^2 - y^4 = -x^4 - y^2 + 3y^4 - x^2 + 4x^2y^2$. Hieruit volgt dat $3x^4 - y^4 = 3y^4 - x^4$, dus $4x^4 = 4y^4$, dus $y = \pm x$. De derde vergelijking levert dan $2x^2 = \frac{1}{3}$, dus $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$. We hebben dus alle mogelijke extrema van f op ∂W gevonden, namelijk $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

[2 punten] **h)** Leg uit waarom f beperkt tot W zowel maxima als minima heeft, en bepaal deze maxima en minima. Het domein W is gesloten (gegeven) en begrensd omdat voor een willekeurige $r > \frac{1}{3}$ (bijvoorbeeld $r = 1$) geldt dat $x^2 + y^2 < r$ als $(x, y) \in W$. Uit volgens Thm 2, p.771 volgt dat f maxima en minima aanneemt op W. Omdat $\left(\pm\sqrt{13}\right)^2 + \left(\pm\sqrt{13}\right)^2 = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$, liggen de kritieke punten $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ en $(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 1/\sqrt{3})$ buiten W. We hebben één extremum van f in het binnenste van W, namelijk $(0, 0)$, en acht kritieke punten op de rand van W, namelijk $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 1/\sqrt{3})$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ en $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (vraag g).
We berekenen $f(0, 0) = 0$, $f(0, \pm 1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} = f(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ en $f(\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}) = \sqrt{3}\left(\frac{2}{36} - \frac{2}{6}\right) = -\frac{10\sqrt{3}}{36} = -\frac{5}{2}\frac{\sqrt{3}}{9} = f(\pm 1/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6})$. We zien dat $(0, 0)$ het maximum is van f beperkt tot W, en dat $(\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6})$ en $(\pm 1/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6})$ de minima zijn van f beperkt tot W. Hoewel $(0, \pm 1/\sqrt{3})$ en $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ lokale maxima van f op de rand van W zijn, zijn het geen maxima van f op heel W, omdat $f(0, 0) > f(0, \pm 1/\sqrt{3})$.

Opgave 2 [3 punten]

Zij $R \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ y \geq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right\}. \tag{3}$$

R is het gebied rechts van de y-as en links van de ellips gegeven door $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 = 1$. Zij C de kromme die de rand van R doorloopt, met positieve oriëntatie ten opzichte van R, en die begint (en eindigt) in $(0, 0)$. Schrijf $C = C_1 \cup C_2$, waarbij C_2 over de y-as loopt, en C_1 over de ellips.

[1.5 punten] **a)** Beschouw het vectorveld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, 2y - 2)$. Laat zien dat $F(x, y)$ loodrecht staat op C_1.
Hint: Op C_1 geldt dat $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

We kunnen twee dingen doen: C_1 direct parametriseren, of gebruiken dat C_1 op de niveauverzameling $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - y = 0$ ligt.
Directe parametrisatie: Uit de omschrijving van R volgt dat de ellips waarvan R de helft is middelpunt $(0, 1)$ heeft en dat $0 \leq y \leq 2$. We proberen dus $r(t) = \left(\sqrt{2}\cos(t), 1 + \sin(t)\right)$. Invullen in de vergelijking van de hint geeft $\frac{1}{4} \cdot 2\cos^2(t) + \frac{1}{2}(1 + \sin(t))^2 - (1 + \sin(t)) = \frac{1}{2}\cos^2(t) + \frac{1}{2} + \sin(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t) - 1 - \sin(t) = \frac{1}{2}\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) - \frac{1}{2} = 0$, dus de parametrisatie klopt. We zien dat $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, omdat $r(-\pi/2) = (0, 0)$ en $r(\pi/2) = (0, 2)$.
De raakvector aan C_1 wordt gegeven door $\frac{dr}{dt} = \left(-\sqrt{2}\sin(t), \cos(t)\right)$. We berekenen het inproduct $\left\langle F(r(t)), \frac{dr}{dt}\right\rangle = \left\langle\left(\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t)\right), \left(-\sqrt{2}\sin(t), \cos(t)\right)\right\rangle = -2\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0$, dus F staat inderdaad loodrecht op C_1.
Niveauverzameling: De kromme C_1 ligt op de niveauverzameling $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - y = 0\right\}$. We kunnen nu Theorem 6, p.742 gebruiken, die zegt dat de gradiënt van een functie loodrecht staat op de niveauverzamelingen van die functie. Noemen we $g(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - y$, dan is $\nabla g(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, y - 1\right) = 2F(x, y)$. Omdat $\nabla g(x, y)$ loodrecht op E staat, staat $F(x, y)$ dus ook loodrecht op E.

[1.5 punten] **b)** Zij $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een vectorveld dat conservatief is op $\mathbb{R}^2$. Bereken $\int_C \langle F + G, dr\rangle$.

Het pad C is gesloten, dus volgens Theorem 1, p. 909 is $\int_C \langle G, dr\rangle = 0$. Daarom is $\int_C \langle F + G, dr\rangle = \int_C \langle F, dr\rangle + \int_C \langle G, dr\rangle = \int_C \langle F, dr\rangle$. De lijnintegraal van F over C kunnen we op twee manieren uitrekenen: door directe berekening, en met de stelling van Green.
Directe berekening: Het pad C is opgedeeld in twee krommen, C_1 en C_2, dus $\int_C \langle F, dr\rangle = \int_{C_1} \langle F, dr\rangle + \int_{C_2} \langle F, dr\rangle$. Uit vraag a) weten we dat F loodrecht staat op C_1, dus $\int_{C_1} \langle F, dr\rangle = 0$. Voor de tweede integraal parametriseren we C_2 met $\rho(t) = (0, 2 - t)$ met $0 \leq t \leq 2$. We berekenen

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \langle F, dr\rangle &= \int_{t=0}^{2} \left\langle F(\rho(t)), \frac{d\rho}{dt}\right\rangle dt \\
&= \int_{t=0}^{2} \langle (0, 2(2 - t) - 2), (0, -1)\rangle \, dt \\
&= \int_{t=0}^{2} -(2 - 2t)\, dt \\
&= \left[-2t + t^2\right]_{t=0}^{2} = 4 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

Stelling van Green: C is de rand van R met positieve oriëntatie ten opzichte van R; C bestaat uit twee gladde krommen C_1 en C_2, en R zelf is gesloten en regulier. We kunnen dus de stelling van Green toepassen, en berekenen

$$\begin{aligned}
\int_C \langle F, dr\rangle &= \int_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA \\
&= \int_R 0 - 0\, dA = 0.
\end{aligned}$$

Opgave 3 [5 punten]

Zij $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de afbeelding gegeven door

$$(x, y) = \Phi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{3}}, \frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{2}\right). \tag{4}$$

[2 punten] **a)** Laat met behulp van de definitie zien dat Φ een coördinaattransformatie is tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Uit $(x, y) = \Phi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{3}}, \frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{2}\right)$ volgt dat $u = \sqrt{3}x$. Dat kunnen we gebruiken om v op te lossen als $\frac{v}{2} = y - \frac{u}{2\sqrt{3}} = y - \frac{x}{2}$, dus $v = -x + 2y$. Gegeven een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, kunnen we dus altijd $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vinden zodat $\Phi(u, v) = (x, y)$; hieruit volgt dat Φ surjectief is.
Stel nu dat $\Phi(u_0, v_0) = (x, y) = \Phi(u_1, v_1)$. Daaruit volgt dat $\frac{u_0}{\sqrt{3}} = \frac{u_1}{\sqrt{3}}$ en $\frac{u_0}{2\sqrt{3}} + \frac{v_0}{2} = \frac{u_1}{2\sqrt{3}} + \frac{v_1}{2}$. Uit de eerste vergelijking volgt $u_0 = u_1$; dit gebruiken in de tweede vergelijking levert $\frac{v_0}{2} = \frac{v_1}{2}$, dus $v_0 = v_1$. Hieruit volgt dat Φ injectief is.
Iedere component van Φ is een polynoom in x en y, en daarom continu op heel $\mathbb{R}^2$. Hetzelfde geldt voor iedere component van $\Psi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{3}\frac{x-y}{2}\right)$. We kunnen concluderen dat Φ voldoet aan de definitie van een coördinaattransformatie tussen $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Als alternatief voor het bovenstaande kun je vaststellen dat Φ een lineaire afbeelding is, die we kunnen schrijven als

$$\Phi(u, v) = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A is een vierkante matrix met determinant $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, dus heeft een triviale nulruimte. Daarom volgt uit $Az_0 = Az_1$ met $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^2$ dat $A(z_0 - z_1) = 0$ als enige oplossing $z_0 - z_1 = 0$ heeft, dus is Φ injectief. Uit het feit dat $\Psi(x, y) == A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ overal op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd is, volgt dat Φ surjectief is. Een lineaire afbeelding is continu vanwege de bovenstaande redenering, en de inverse afbeelding $\Psi(x, y)$ is dat om dezelfde redenen ook.

Zij $U \subset \mathbb{R}^2$ gegeven als

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le \sqrt{3}x \le 1,\ x \le 2y \le x + \sqrt{1 - 3x^2}\right\}. \tag{5}$$

[1.5 punten] **b)** Laat zien dat $\Phi^{-1} = \Psi$ de verzameling U afbeeldt op

$$V = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ v \ge 0,\ u^2 + v^2 \le 1\right\}. \tag{6}$$

De rand van U bestaat uit twee delen: het lijnstuk $y = \frac{x}{2}$ met $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ en de grafiek van $y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1 - 3x^2}\right)$ over het interval $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. De vergelijking voor de lijn wordt in (u, v)-coördinaten gegeven door $\frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{2} = \frac{u}{2\sqrt{3}}$, dus door $\frac{v}{2} = 0$, ergo $v = 0$. De x-grenzen transformeren naar $-1 < u < 1$, dus we krijgen het verticale lijnstuk tussen $(u, v) = (-1, 0)$ en $(u, v) = (1, 0)$.
De vergelijking voor de grafiek wordt in (u, v)-coördinaten gegeven door $\frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{2} = \frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 3\frac{u^2}{3}}$, dus $v = \sqrt{1 - u^2}$. Dit is de halve cirkel met straal 1 in het (u, v)-vlak voor $v \ge 0$, die eindigt in de punten $u = \pm 1$, $v = 0$. Kortom, de rand van U wordt afgebeeld op de rand van V en vice versa.
Het enige dat we nog moeten laten zien is dat een punt in het binnenste van U wordt afgebeeld

naar het binnenste van V. Nemen we bijvoorbeeld $(x, y) = (0, 1/4) \in U$, dan geldt $\Psi(0, 1/4) = \left(\sqrt{3} \cdot 0, -0 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = (0, 1/2)$, en dit punt ligt in het binnenste van V.

[1.5 punten] **c)** Laat zien dat

$$\int_U e^{x(x-y)} e^{y^2} \mathrm{d}A = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(e^{1/4} - 1\right).$$

We gebruiken eerst Stelling 5.3 uit het toevoegingendocument, en schrijven

$$\int_U e^{x(x-y)} e^{y^2}\, \mathrm{d}A = \int_V e^{(u^2+v^2)/4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}\, \mathrm{d}A,$$

omdat $\det \Phi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ en $x(x-y)+y^2 = \frac{u}{\sqrt{3}}\left(\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{u}{2\sqrt{3}} - \frac{v}{2}\right) + \left(\frac{u}{2\sqrt{3}} + \frac{v}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{6} - \frac{uv}{2\sqrt{3}} + \frac{u^2}{12} + \frac{uv}{2\sqrt{3}} + \frac{v^2}{4} = \frac{u^2+v^2}{4}$.

Omdat V een halve cirkelschijf is, en er $u^2 + v^2$ in het argument van de e-macht staat, lijkt het een goed idee om V te omschrijven in poolcoördinaten. We schrijven $u = r\cos(\theta)$ en $v = r\sin(\theta)$, dan wordt (het binnenste van) V omschreven door $0 < r < 1$ en $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. We kunnen de integraal over V dus berekenen als

$$\begin{aligned}
\int_V e^{(u^2+v^2)/4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}\, \mathrm{d}A &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2/4} \cdot r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \int_{r=0}^{1} r\, e^{r^2/4}\, \mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[2e^{r^2/4}\right]_{r=0}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(2e^{1/4} - 2\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(e^{1/4} - 1\right).
\end{aligned}$$