

Lineaire algebra I

Maandag 13 januari, 2025

Geen rekenmachines, telefoons, dictaat of aantekeningen. Motiveer elk antwoord!

Opgave 1 (9 punten). Zij B de reële matrix

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle eigenwaarden van B en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- (b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix Q zodanig dat geldt

$$D = Q^{-1}BQ.$$

- (c) Bereken B^{2025} .

[In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals $3 \cdot 17^{2025} + 4 \cdot (-4)^{1024}$ laten staan.]

Opgave 2 (8 punten). Voor elke $b \in \mathbb{R}$ definiëren we de matrix M_b en de vector v als

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & -1 & 1 \\ b & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geef alle $b \in \mathbb{R}$ waarvoor de vergelijking $M_b \cdot x = v$ meer dan één oplossing heeft.
- (b) Geef voor één van de waarden uit (a) de volledige oplossingsverzameling.

Opgave 3 (7 punten). Zij $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ de vectorruimte van reële polynomen van graad ten hoogste 3. Je mag gebruiken dat $B = (1, x, x^2, x^3)$ een basis is voor V . Zij $d: V \rightarrow V$ de afbeelding die $f \in V$ stuurt naar $f(x+1) - f(x)$.

- (a) Bepaal de matrix $[d]_B^B$.
- (b) Wat zijn de eigenwaarden van d ?
- (c) Is d diagonaliseerbaar?

Opgave 4 (6 punten). Gegeven zijn de vectoren

$$a = (1, -1, 1, 2),$$

$$v = (1, 2, 1, 1),$$

$$w = (1, 0, 3, -3)$$

in $\mathbb{R}^4$. Zij $V = \{a\}^\perp \subset \mathbb{R}^4$. Zij $W \subset \mathbb{R}^4$ het vlak voortgebracht door v en w . Geef voortbrengers voor de doorsnede $V \cap W$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 5 (8 punten). Zij $H \subset \mathbb{R}^5$ het hyperoppervlak met normaal $a = (2, 3, -1, 0, 5)$, dus $H = \{a\}^\perp$. Zij $\pi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ de projectie op H en zij A de 5×5 matrix die π beschrijft ten opzichte van de standaard basis, dus $\pi = f_A$.

[Waarschuwing: je hoeft A niet uit te rekenen]

- (a) Is A inverteerbaar?
- (b) Geef alle eigenwaarden van A . [Bewijs dat je alle eigenwaarden gevonden hebt!]
- (c) Geef voor elke eigenwaarde λ een stel voortbrengers voor de eigenruimte $E_\lambda(A)$.
- (d) Is A diagonaliseerbaar?

Opgave 6 (7 punten). Zij U, V, W eindig-dimensionale vectorruimtes over $\mathbb{R}$ en $f: U \rightarrow V$ en $g: V \rightarrow W$ lineaire afbeeldingen.

- (a) Bewijs dat er geldt $\text{rk}(g \circ f) \leq \text{rk}(g)$.
- (b) Laat zien dat er gelijkheid geldt dan en slechts dan als $\ker(g) + \text{im}(f) = V$.

[Zoals gebruikelijk staan $\text{rk}(f)$, $\ker(f)$ en $\text{im}(f)$ voor resp. de rang, de kern en het beeld van f .]