

Tentamen Algebra 2

maandag 6 januari 2025, 9:00–12:00

Ja mag de dictaten van Algebra 2 en Algebra 1 gebruiken, maar geen andere boeken, aantekeningen of uitwerkingen. Je mag opgaven van het dictaat **niet** zonder bewijs gebruiken. **Om alle punten te halen moet je alle tussenstappen laten zien en elk antwoord motiveren.** Succes!

Iedere opgave is 9 punten waard, totaal 45 punten. Cijfer = (punten/5) + 1.

1. (a) Laat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de drie complexe nulpunten van het polynoom

$$X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

zijn. Bereken $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

- (b) Zij $p > 3$ een priemgetal. Laat zien dat het polynoom $X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ geen dubbel nulpunt heeft in $\mathbb{F}_p$.

2. Ontbind de volgende ringelementen in irreducibele factoren. Vergeet niet om te motiveren waarom elke factor irreducibel is.

(a) $3 - 15i$ in $\mathbb{Z}[i]$;

(b) $2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 8X + 6$ in $\mathbb{Z}[X]$;

(c) $Y^2 - X^3 - 1$ in $\mathbb{C}[X, Y]$.

3. Zij R een commutatieve ring.

(a) Zij $f: \mathbb{Z}[X]/(X^2) \rightarrow R$ een ringhomomorfisme en definieer $r := f(X)$. Bewijs: $r^2 = 0$.

(b) Laat zien dat de afbeelding

$$\{\text{ringhomomorfismen } \mathbb{Z}[X]/(X^2) \longrightarrow R\} \rightarrow \{r \in R : r^2 = 0\}$$

gedefinieerd door $f \mapsto f(X)$ bijectief is.

(c) Vind alle ringhomomorfismen $\mathbb{Z}[X]/(X^2) \rightarrow \mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

4. Zij $R = \mathbb{Q}[[X]]$ de ring van machtreeksen met coëfficiënten in $\mathbb{Q}$.
- (a) Bereken de inverse van $1 + X \in R$.
 - (b) Zij $I = (X)$ het ideaal voortgebracht door X . Laat zien dat ieder element van $R \setminus I$ inverteerbaar is.
 - (c) Laat zien dat I het enige maximale ideaal van R is.
5. Geef een voorbeeld (met bewijs) van:
- (a) een $\mathbb{Z}$ -moduul dat torsievrij is maar niet vrij;
 - (b) een ring R en een linksideaal $I \subset R$ dat geen rechtsideaal is;
 - (c) een ring R , een vrij R -moduul M en een deelmoduul $N \subset M$ dat niet vrij is.